第 9 讲　真空中的静电场

一　电荷与电场强度

※ 基础知识：电荷

电荷是对物体带电这一属性的抽象，其本质是物质原子中的电子与质子的数量差产生的电效应

概念　**电荷**分为正电荷与负电荷，主要属性为**电荷量**，一般用 q 和 Q 表示，单位为**库仑**（C）

电荷的相互作用方式就是与其它电荷之间产生相互作用力，这一机制被总结为**库仑定律**

定律

库仑定律

真空中两个点电荷的带电量分别为 q_1 和 q_2，则这两个点电荷之间的相互作用力为

$$\boldsymbol{F}_{21}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\hat{\boldsymbol{r}}_{12}$$

其中，ε_0 为**真空中的介电常数**，具体值为 $8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}$

库仑力的方向沿着两点电荷的连线，同号电荷相斥，异号电荷相吸

为了解释为什么两个电荷明明没有接触却能够相互作用，物理学家创造了**电场**的概念：

电荷在其周围空间激发**电场**，通过电场对其他电荷产生库仑力

概念

电场强度

单位试验电荷（电量小，可看成点电荷）在该点所受电场力定义为**电场强度**

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q_0}$$

单位 N/C 或 V/m

※ 求解电场强度分布

根据库仑定律，单个点电荷在某处产生的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$$

多个点电荷共同产生的电场则等于各点电荷单独产生的电场的**矢量和**，称为**场强叠加原理**

$$\boldsymbol{E}=\sum\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{\boldsymbol{r}}_i$$

电荷连续分布的带电体（绝缘），产生的场强为各电荷微元单独产生场强的矢量和（积分）

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}q \quad \boldsymbol{E}=\int\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}q}$$

方法

微元法求连续点电荷构成的带电体在某点的场强

！ **首先观察电荷分布**

若电荷分布具有对称性，则会有某些方向的场强分量为 0

① **将带电体分割成点电荷微元 $\mathrm{d}q$**

电荷连续分布的情况通过**电荷密度**（空间的数量函数）表示，分为线（λ）、面（σ）、体（ρ）密度，则

$$\boxed{\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}l} \text{ 或 } \boxed{\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}S} \text{ 或 } \boxed{\mathrm{d}q=\rho\mathrm{d}V}$$

然后将体积微元若是圆弧或球面，用角度 $\mathrm{d}\theta$ 进一步代换

② **表示出该微元电荷产生的场强 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$**

一般要求出各个分量

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{E}=\frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}q}$$

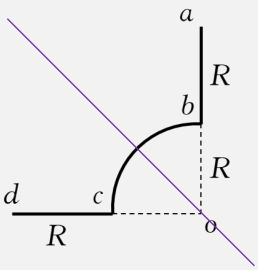
最好画图标出场强方向，防止分量算错，这里就要规定好各个分量的正方向

③ **对 $\mathrm{d}\boldsymbol{E}$ 作积分**

注意电场强度是矢量，因此要对各个分量分别积分，最后要判断好方向）

$$\boxed{\boldsymbol{E}=\int\mathrm{d}\boldsymbol{E}}$$

例 1 均匀带电直线弯成如图形状，已知 $ab=cd=R$，bc 是半径为 R 的四分之一圆弧，电荷线密度为 λ。求圆弧中心 o 点的电场强度



解 带电体电荷均匀分布，呈轴对称（如图所示），且对称轴过 o 点

→ o 点场强与对称轴垂直的分量为 0，只有平行的分量

考虑 ab 上与 o 距离为 x 的一点，微元应表示为 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x$，其在 o 点产生的场强

$$dE_{//}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

考虑圆弧 bc 上一点 P（oP 与对称轴夹角为 θ），微元应表示为 $dq=\lambda R d\theta$，则

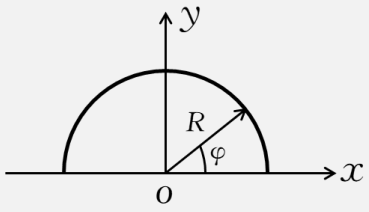
$$dE_{//}=\cos\theta\cdot\frac{\lambda R d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{\lambda\cos\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

对称轴左右两侧产生的场强平行分量大小是相等的，因此

$$E=2\left(\int_R^{2R}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2}+\int_0^{\pi/4}\frac{\lambda\cos\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}\right)=\frac{3\sqrt{2}\lambda}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

方向沿正右下

例 2 一带电细线弯成半径为 R 的半圆形，电荷线密度 $\lambda=\lambda_0\sin\varphi$，其中 λ_0 为一正常量，φ 为半径 R 与 x 轴组成的夹角，如图所示，试求圆心 O 处的电场强度。



解 带电体电荷分布虽然不均匀，但其实可以证明是关于 y 轴对称的

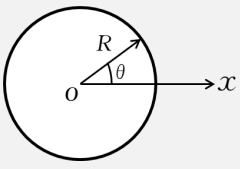
夹角为 φ 的微元电荷在 O 点产生的场强 y 轴分量大小

$$dE_y=\sin\varphi\cdot\frac{\lambda R d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin^2\varphi d\varphi$$

积分

$$E=E_y=\int_0^{\pi}\frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin^2\varphi d\varphi=\frac{\lambda_0}{8\varepsilon_0 R}$$，方向竖直向下

例 3 一带电球面，面电荷密度分布为 $\sigma=\sigma_0\cos\theta$，式中 σ_0 为常量，θ 角如图所示，求球心处电场强度 $\boldsymbol{E}$



解　① 判断对称

面电荷密度分布 $\sigma=\sigma_0\cos\theta$，因此电荷分布关于 x 轴对称，场强只有 x 轴分量

② 取微元

球坐标下的体积微元为 $r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$，当 $r=R$ 时，体积微元成为面积微元

$$\mathrm{d}S=R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\quad(0<\theta<\pi,\ 0<\varphi<2\pi)$$

因此

$$\mathrm{d}q=\sigma\mathrm{d}S=\sigma_0R^2\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

③ 列出 $\mathrm{d}E$，然后积分

$$\mathrm{d}E_x=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0R^2}\cos\theta=\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\quad(\text{以 }x\text{ 轴负向为正})$$

$$E_x=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0R^2}\cos\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\frac{\sigma_0}{4\pi\varepsilon_0}\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\sigma_0}{3\varepsilon_0},\ \text{方向沿 }x\text{ 轴负向}$$

二　电通量与高斯定理

※ 基础知识

知道怎么求电场分布后，我们可以来统计电场，也就是计算一个面上到底有多少电场强度

概念

电通量

某曲面 S 上各点的电场强度的第二类曲面积分（法向分量的积分）称为该曲面的**电通量**

$$\Phi_e=\int_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

对于闭合曲面，规定法线方向 $\boldsymbol{n}$ 为自内而外的方向

而下面的**高斯定理**将电通量与电荷量紧密联系了起来

定理

高斯定理

通过任意闭合曲面的电通量等于该曲面所包围的所有电荷量的代数和除以 ε_0

$$\boxed{\Phi_e=\oint_S\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_i}$$

利用高斯定理，可以简便的求解电通量

例 1 图中虚线所示为一立方形的高斯面，已知空间的场强分布为：$E_x=bx$，$E_y=0$，$E_z=0$。高斯面边长$a=0.1\mathrm{m}$，常量$b=1000\mathrm{N/(C\cdot m)}$。则该闭合面内包含的净电荷为_____.

解 由于只有E_x不为0，只有左、右两个面上有电通量：

$$\Phi_e=E_x(2a)\cdot a^2-E_x(a)\cdot a^2=2ab\cdot a^2-ab\cdot a^2=a^3b$$

则由高斯定理

$$q=\varepsilon_0 a^3 b=8.85\times10^{-12}\mathrm{C}$$

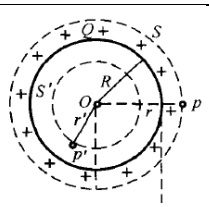
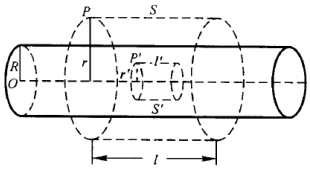
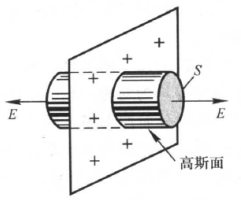
※ 用高斯定理求电场强度分布

对于一类电荷分布呈现特殊对称性从而产生的场强具有特殊对称性的物体，若能找到闭合曲面，使得其上的电通量能直接表示成

表面积 × 电场强度

那么，我们就可以反向使用高斯定理，求解出电场强度分布

常见的可以使用高斯定理的模型分为以下三类

类型	电荷分布要求	高斯面作法
 **球面/球体**	电荷密度只与r有关	圆心为O，半径为r的球面 $4\pi r^2E=\ldots$
 **无限长圆柱面/体**	电荷密度只与r有关	轴线相同，半径为r，高为l的圆柱面 $2\pi rlE=\ldots$
 **无限大平面**	电荷在面上均匀分布	底面与平面平行，底面积为S的柱面 $2SE=\ldots$

方法

高斯定理求带电体的场强分布

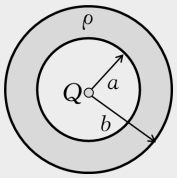
① **找特定的闭合曲面（高斯面）**，使曲面上各点场强大小相同，方向均垂直于该点法向量

② 设该曲面上场强大小E，**用定义求出曲面的电通量**

	③ 再**用高斯定理求出曲面的电通量**，列方程即可解出 E，再根据对称性描述方向 （此时电荷可能是连续分布的，要用积分求出电荷量）

例 1

有一带电球壳，内、外半径分别为 a 和 b，电荷体密度 $\rho=A/r$，A 是已知常量，r 为离球心的距离，在球心处有一点电荷 Q。试求电场强度 $\boldsymbol{E}$ 的分布。



解析

取**半径为 r 的同心球面**为高斯面，设球面上的场强为 E，则有

$$4\pi r^2E=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q \;\rightarrow\; E=\frac{\sum q}{4\pi r^2\varepsilon_0}$$

q 和 r 的关系要分类讨论：

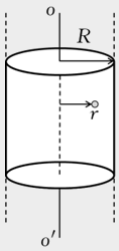
$r<a$　　$\sum q=Q$　　$E=\dfrac{Q}{4\pi r^2\varepsilon_0}$

$a<r<b$　　$\sum q=Q+\int_a^r\dfrac{A}{r}4\pi r^2\mathrm{d}r=Q+2\pi A(r^2-a^2)$　　$E=\dfrac{Q+2\pi A(r^2-a^2)}{4\pi r^2\varepsilon_0}$

$r>b$　　$\sum q=Q+\int_a^b\dfrac{A}{r}4\pi r^2\mathrm{d}r=Q+2\pi A(b^2-a^2)$　　$E=\dfrac{Q+2\pi A(b^2-a^2)}{4\pi r^2\varepsilon_0}$

例 2

半径为 R 的无限长圆柱，柱内电荷体密度为 $\rho=ar-br^2$，r 为某点到圆柱轴线的距离，a、b 为常量，试求带电圆柱内外电场分布。



解析

无限长圆柱模型，因此取**半径为 r，长 l 的同轴圆柱面**为高斯面，设侧面上各点场强为 E：

$$2\pi rlE=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q \;\rightarrow\; E=\frac{\sum q}{2\pi rl\varepsilon_0}$$

当 $r<R$ 时

$$\sum q=\int_V\rho\mathrm{d}V=l\int_0^r(ar-br^2)\cdot 2\pi r\mathrm{d}r=2\pi l(\frac{1}{3}ar^3-\frac{1}{4}br^4)$$

$$E=\frac{1}{\varepsilon_0}(\frac{1}{3}ar^2-\frac{1}{4}br^3)$$

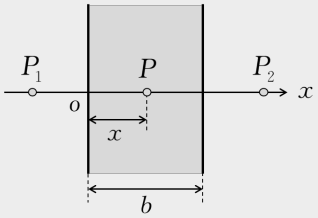
当$r>R$时

$$\sum q=\int_V \rho \mathrm{d}V=l\int_0^R(ar-br^2)\cdot 2\pi r\mathrm{d}r=2\pi l(\frac{1}{3}aR^3-\frac{1}{4}bR^4)$$

$$E=\frac{1}{r\varepsilon_0}(\frac{1}{3}aR^3-\frac{1}{4}bR^4)$$

例 3

如图所示，一厚为 b 的“无限大”带电平板，其电荷体密度分布为 $\rho=kx^2(0\le x\le b)$，式中 k 为一正的常量。求：



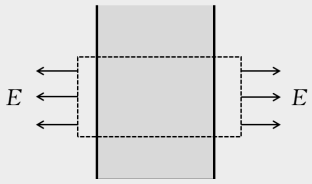
(1) 平板外两侧任一点 P_1 和 P_2 处的电场强度大小；

(2) 平板内坐标为 x 任一点 P 处的电场强度大小。

解析

无限大平板模型，因此取**轴线垂直于平板平面的圆柱面**为高斯面，则仅两底面有电通量

(1) 对于平板外两侧的点，让两个底面均位于平板外侧，底面积为 S

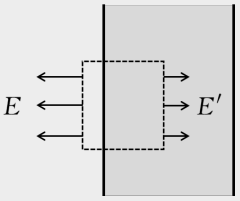


设两底面上的场强为 E，由高斯定理

$$2SE=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q\Rightarrow E=\frac{\sum q}{2S\varepsilon_0}$$

$$\sum q=\int_V \rho \mathrm{d}V=S\int_0^b kx^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}Skb^3\ \rightarrow\ E=\frac{kb^3}{6\varepsilon_0}$$

(2) 让其中一个底面位于 x 处



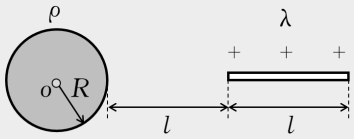
则此时的电通量

$$(E+E')S=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$

	$$\sum q=\int_V \rho \mathrm{d}V=S\int_0^x kx^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}Skx^3$$ $$E'=\frac{1}{S\varepsilon_0}\frac{1}{3}Skx^3-\frac{kb^3}{6\varepsilon_0}=\frac{k}{3\varepsilon_0}(x^3-\frac{b^3}{2})$$

※ **带电体受到的电场力**

思路与求万有引力类似，先求出作用体形成的电场分布，然后对被作用体微元积分

例 3	如图所示，在真空中一半径为 R 的非金属带电球，电荷体密度为 $\rho=kr^2$，k 为正常量，r 为离球心的距离。另有一均匀带电细棒，长为 l，电荷线密度为 λ，棒的一端距球面距离为 l，求细棒所受的静电场力 
解析	球产生的场强分布为 $$E=\frac{kR^5}{5\varepsilon_0 r^2}\quad(r>R)$$ 取棒上点电荷微元 $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}r$，则距球心 r 处的微元受到的电场力 $$\mathrm{d}F=\frac{kR^5}{5\varepsilon_0 r^2}\lambda\mathrm{d}r\quad(\text{方向向右})$$ 积分： $$F=\int_{R+l}^{R+2l}\frac{kR^5}{5\varepsilon_0 r^2}\lambda\mathrm{d}r=\frac{k\lambda R^5}{5\varepsilon_0}(\frac{1}{R+l}-\frac{1}{R+2l})$$

三　静电场的能量与电势

※ **基础知识**

除了力之外我们当然还要研究电场的做功与能量特点，于是得到了**电场力做功路径无关**

定理	**电场力做功路径无关** 当试验电荷在静止点电荷电场中移动时，电场力所做的功仅与试验电荷电量的大小及其起点和终点的位置有关，而与电荷移动的路径无关

这一定理的等价表述，就是**静电场环路定理**

定理	**静电场环路定理** 在静电场中，电场强度沿任意闭合回路的线积分恒等于零

	$$\oint \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$$

这也说明了静电场是保守场，因此可以引入势能相关的概念：

概念	**电势能** 当试验电荷 q_0 从 a 点移动至 b 点，其间电场力所做的功等于其**电势能**增量的负值 $$A_{ab}=\int_a^b q_0\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-(W_{\mathrm{b}}-W_{\mathrm{a}})=-\Delta W$$ 电势能是相对的，需要规定一个电势能为 0 的**参考点**，当场源电荷分布在空间有限区域内时，通常规定试验电荷在无限远处的电势能为 0，则电势能 $$W_{\mathrm{P}}=\int_P^{\infty} q_0\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$ 电荷从高电势能点移向低电势能点 ，电势能减小 ，电场力做正功 电荷从低电势能点移向高电势能点 ，电势能增加 ，电场力做负功

同时我们注意到，电势能是和试验电荷的电荷量成正比的，这个比值才是电场具有的性质，称为

概念	**电势** 试验电荷在空间某点的电势能与其电荷量的比值定义为**电势**，是只与空间位置有关的函数 $$\boxed{U=\frac{W_P}{q_0}=\int_P^{P_0}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}$$ P_0 是电势为 0 的**参考点**，一般是无穷远处（∞）

引入电势之后，电场力做功可以表示为

$$A_{ab}=q_0\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=q_0(U_a-U_b)$$

※ 通过电场求电势

若我们可以获得电场分布，那么，用定义式对场强积分就可以求出电势

方法	① 通过高斯定理求解电场分布 ② 对任意一点，选择一条方便求解的路径，运用定义式积分，就能得到电势

严选真题	半径各为 r_1 和 r_2（$r_1<r_2$）的两个同心球壳之间的空间充满非导电物质，并带有均匀的电荷密度 ρ。求如下几个区域的电势 V（写成离球心距离 r 的函数）：

	(1) $r>r_2$；(2) $r_2>r>r_1$；(3) $r_1>r$
解析	首先由高斯定理求出电场分布，取半径为 r 的球则有 $$4\pi r^2E=\rho\cdot\left(\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{4}{3}\pi r_1^3\right)\quad(r_1<r<r_2)$$ 因此 $$E=\begin{cases}0, & 0<r<r_1\\ \dfrac{\rho}{3}(r-\dfrac{r_1^3}{r^2}), & r_1<r<r_2\\ \dfrac{\rho}{3r^2}(r_2^3-r_1^3), & r_1<r<r_2\end{cases}$$ 因此 $$V=\int_0^{\infty}E\mathrm{d}r$$ 1) $r>r_2$ $$V=\int_{r_2}^{\infty}\frac{\rho}{3r^2}(r_2^3-r_1^3)\mathrm{d}r=\frac{\rho(r_2^3-r_1^3)}{3r_2}$$ 2) $r_1<r<r_2$ $$V=\int_r^{r_2}\frac{\rho}{3}\left(r-\frac{r_1^3}{r^2}\right)\mathrm{d}r+\frac{\rho(r_2^3-r_1^3)}{3r_2}=\frac{\rho}{3}\left[\left(\frac{1}{2}r_2^2+\frac{r_1^3}{r_2}\right)-\left(\frac{1}{2}r^2+\frac{r_1^3}{r}\right)\right]+\frac{\rho(r_2^3-r_1^3)}{3r_2}$$ 3) $r<r_1$ $$V=0+\int_{r_1}^{r_2}\frac{\rho}{3}(r-\frac{r_1^3}{r^2})\mathrm{d}r+\frac{\rho(r_2^3-r_1^3)}{3r_2}=\frac{\rho}{3}(\frac{1}{2}r_2^2+\frac{r_1^3}{r_2}-\frac{3}{2}r_1^2)+\frac{\rho(r_2^3-r_1^3)}{3r_2}$$

※ 通过电势叠加原理求解电势

电场有叠加原理，那么自然可以推导出

定理	**电势叠加原理** 电场中某点的电势等于场中每个点电荷单独存在时在该点所产生的电势的代数和

而根据电势定义，**单个点电荷** q **或电荷微元** $\mathrm{d}q$ 在某点产生的电势为

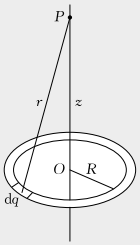
$$\boxed{U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\quad\text{或}\quad\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

其中，r 是该点到点电荷的距离

方法	① 将带电体分解为微元，表示出微元在特定点产生的微电势 ② 对微电势积分

例 1

求半径为 R 均匀带电圆环（总电量 q ）轴线上一点的电势（规定无穷远处为参考点）



解析

建立如图坐标系，设微元电荷产生的电势为 $\mathrm{d}U$ ，电荷线密度

$$\lambda=\frac{q}{2\pi R}$$

表示出 $\mathrm{d}U$ 积分，得到总电势

$$U_{\mathrm{P}}=\int_0^{2\pi}\frac{\lambda R\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+z^2}}$$

特殊情形：即使球面不均匀带电，球面电荷在球心处产生的电势也只和球面总电量有关

$$U=\int_S\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_S\mathrm{d}q=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

※ 由电势分布求解电场

定理

电场是电势的梯度

电场中任一点的电场强度矢量，等于该点电势梯度矢量的负值

$$\boxed{\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,U=-\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right)}$$

例 2

某区域内电场的电势分布函数为 $U=ax^2+bxy-cz^3$ ，其中 a 、 b 、 c 为常量。则该区域中任一点的电场强度 $\boldsymbol{E}=$ _____。

解析

代入公式，分别对 U 求三个偏导数，然后并成向量，记得加上负号

$$\boldsymbol{E}=-\mathrm{grad}\,U=-(2ax+by,bx,-3cz^2)$$

或写成

$$\boldsymbol{E}=-(2ax+by)\vec{i}-bx\vec{j}+3cz^2\vec{k}$$

第 10 讲　静电场中的导体与电介质

一　静电场中的金属导体

上一讲学习了带电体如何产生电场和电势，那么这里就有一个问题：带电体的电荷之间会不会相互影响？这和带电体的性质（电荷移动的自由性）有关，也是本讲要学习的内容

※ 基础知识：静电场中金属导体的静电平衡

静电场会引起金属导体内部自由电子的移动，改变导体的电荷分布，产生自己的电场叠加，达到平衡

过程	**静电平衡的形成** 外电场引起导体上自由电子的移动，使导体带上**感应电荷** 感应电荷激发**附加电场**，改变导体内外的电场 当导体内的外电场与附加电场正好**相互抵消**时，自由电子停止宏观运动，导体达到静电平衡

达到静电平衡时，具有如下特点

结论	① 导体内部场强处处为 0，且表面外侧紧靠表面处的场强处处与表面垂直 ② 导体是一个等势体，导体表面是一个等势面 ③ 电荷只分布在导体的表面上，总电荷量不变，电荷面密度与场强的关系为 $$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$ 且孤立导体曲率越大的地方，电荷面密度就越大

若导体内开有空腔，则还有如下特点

① 外部电场无法影响到空腔内，只能引起外表面电荷的分布

② 外表面未接地时，空腔内的电荷将影响导体外的电场

若外表面接地（电势变为 0），则内外电场互不干扰

严选真题	对于一个带电的金属导体，下列说法不正确的是 A. 如果金属导体是实心球，导体内部电势相同 B. 如果金属导体是不规则的实心体，导体内部电势相同 C. 如果金属导体是不规则的实心体，导体表面电场相同 D. 在金属导体球内挖一个不规则的空腔，空腔内部电势相同
解析	导体表面的电场强度与电荷面密度有关，电荷面密度又和导体表面曲率有关，因此 C 错误

※ 静电场中的金属导体问题

想要求解静电场中的带电金属导体产生的电场和电势，需要先求解出静电平衡时的电荷分布

然后根据 电荷 → 电场 → 电势 的链路依次求解

由于题目中的模型都具有对称性（可以用高斯定理），因此电荷在静电平衡时的分布也具有对称性

方法

① 根据模型特点，找出所有的导体表面，分别假设它们的电荷面密度

② 用这些电荷面密度表示出导体内的电场强度，使其为 0，结合电荷守恒求解出密度

③ 接地 → 改变导体所带电荷量，使得其电势为 0

连接 → 两个导体等电势，电荷在两个导体间重新分布

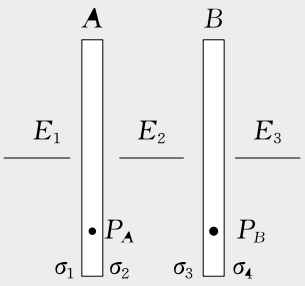
首先来看一个无限大平板的例子

例 1

一块面积为 S 的金属大薄平板 A，带电量为 Q，在其附近平行放置另一块不带电的金属大薄平板 B，两板间距远小于板的线度。试求两板表面的电荷面密度，以及周围空间的场强分布。

解析

两块平板一共有 4 个表面，因为可视为无限大，其表面上若有电荷都应是均匀分布的



设这四个平面的电荷面密度分别为 σ_1、σ_2、σ_3、σ_4

根据电荷守恒，有

$$\sigma_1+\sigma_2=\frac{Q}{S}\ ①\ ,\ \ \sigma_3+\sigma_4=0\ ②$$

空间任一点的场强，是这 4 个带电平面产生的场强叠加的结果

平面均视为无限大，则由高斯定理，由某平面产生的电场为

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$，规定向右为正，向左为负

根据静电平衡，两个导体内部场强都应该为 0，各取一点，用场强叠加原理计算：

$$P_A:\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0\ ③$$

$$P_B:\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0\ ④$$

联立以上方程①～④，解得

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_4=\frac{Q}{2S}\ ,\ \ \sigma_3=-\frac{Q}{2S}$$

接下来求电场，根据无限大带电平面的特点，空间一共被分为 3 处，每处的场强都是相等的

因此同样根据高斯定理与场强叠加，分别求出 3 处的场强

$$E_1=-\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=-\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

$$E_2=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

$$E_3=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

再来看一个圆球的例子

例 2

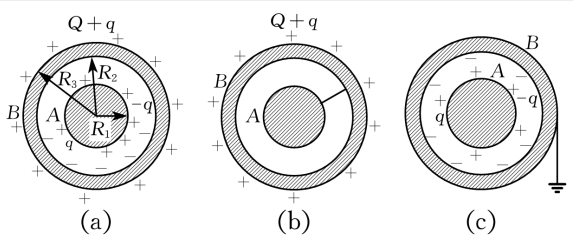
如图所示，一半径为 R_1 的导体球 A，带有电量 q，球外有一内、外半径分别为 R_2 和 R_3 的同心球壳 B，带有电量 Q。

(1) 求球 A 和球壳 B 的电势；

(2) 若用细导线连接球 A 和球壳 B，再求其电势；

(3) 若未连接时使外球接地，此时其电势又是多少？

(4) 如果外球接地后再拆除，然后将内球接地，此时其电势又是多少？（设外球离地很远）



解析

(1) 题目中一共有 3 个表面：A 的外表面，B 的内、外表面

① 求电荷量

根据静电平衡，球壳内部场强均为 0，在球壳内作高斯面，则电通量为 0

从而该面包括的电荷量（A 外表面、B 内表面）代数和为 0

$$q_{\mathrm{A}}+q_{\mathrm{B内}}=0$$

而 B 初始带电量 Q，电荷守恒

$$q_{\mathrm{B外}}+q_{\mathrm{B内}}=Q$$

解得

$$q_{\mathrm{A}}=q \quad q_{\mathrm{B内}}=-q \quad q_{\mathrm{B外}}=Q+q$$

② 求电场强度

这个体系是高度对称的，因此电场均匀分布，适合用高斯定理求解

对高斯定理求电场还不熟悉的请回顾第 9 讲，这里直接给出结果

$$E=\begin{cases}\dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & r>R_3\\ 0, & 0<r<R_1, R_2<r<R_3\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, & R_1<r<R_2\end{cases}$$

③ 根据电势定义求电势

球壳 B 的电势

$$U_{\mathrm{B}}=\int_{R_3}^{\infty}\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

球 A 的电势

$$U_{\mathrm{A}}=U_{\mathrm{B}}+\int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

(2) 用导线连接 A 和 B 后，相当于两个导体变成一个

因此电荷将全部分布到球壳的外表面也就是 B 外，两导体等势

$$U_{\mathrm{A}}=U_{\mathrm{B}}=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

(3) 球壳接地后，其外表面的电荷被中和，和大地等电势（通常取为 0）

此时 A 上的电荷不变，从而电场分布也不变，因此 A 的电势

$$U_{\mathrm{A}}=U_{\mathrm{B}}+\int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=0+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

(4) 将外球壳接地后，其外表面电势为 0，

设此时外表面电量为 x，内表面电量因为要保持静电平衡因此还是 $-q$

则根据 (1) 的结果：

$$U_{\mathrm{B}}=\frac{q+(-q)+x}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=0 \quad\rightarrow\quad x=0$$

因此 B 外表面无电荷，外壳总电荷量

$$q_{\mathrm{B外}}=-q$$

接地拆除后这一值保持不变

将内球接地后，A 的电势变 0，电荷量 q_{A} 未知

由静电平衡、电荷守恒、A 电势为 0

$$q_{\mathrm{A}}+q_{\mathrm{B内}}=0$$

$$q_{\mathrm{B内}}+q_{\mathrm{B外}}=-q$$

将以上电荷量代入

$$U_{\mathrm{A}}=\frac{q_{\mathrm{A}}}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{q_{\mathrm{B内}}}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{q_{\mathrm{B外}}}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=0$$

最终解得

$$q_{\mathrm{A}}=\frac{q}{R_3}/(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3})$$

此时

$$U_{\mathrm{A}}=0$$

$$U_{\mathrm{B}}=\frac{q_{\mathrm{B外}}}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}\left[\frac{1}{R_3}/(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3})-1\right]$$

二　静电场中的电介质

※ 基础知识：静电场中的电介质

电介质通常是没有净电荷的，当电介质受到电场作用时，会

① 在电介质表面产生**极化电荷**，进而产生附加电场

② 附加电场与原有电场叠加后，在电介质里依然不为 0

接下来我们理清楚极化电荷与最终电场强度间的关系

从微观上看，电介质内的分子受到电场作用会产生电矩，因此定义极化强度

概念

极化强度

电场内某点对应的体积微元中所有分子电矩的矢量和 $\boldsymbol{P}$ 称为该处的**极化强度**

极化强度是连接极化电荷和电场强度的桥梁：

定理

实验证明，在各向同性的均匀电介质中

$$\boxed{\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\chi_e\boldsymbol{E}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\boldsymbol{E}}$$

其中，χ_e 为介质的**电极化率**，ε_r 为电介质的**相对介电常数**

而对于电介质表面的极化电荷

定理

极化电荷面密度

均匀电介质极化时，电介质表面上某点处的**极化电荷面密度** σ' 等于极化强度在该点的法向分量

$$\boxed{\sigma' = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n}$$

在两种电介质的交界处，σ' 等于两个介质的面密度的代数和

有了极化强度，我们就能对极化电荷和自由电荷分别使用高斯定理，来求解最终的电场强度了，不过，这样要用两次高斯定理有些麻烦，因此为了不考虑极化电荷和附加电场，引入电位移 $\boldsymbol{D}$

概念

电位移 $\boldsymbol{D}$

$$\boxed{\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon\boldsymbol{E}}$$

其中，ε 为介质的**介电常数**，满足

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r = \varepsilon_0(1+\chi_e)}$$

此时，将电位移用于高斯定理，得到**电介质中的高斯定理**

概念

电介质中的高斯定理

通过电场中任意闭合曲面的位移电通量，等于该闭合面所包围的自由电荷的代数和

$$\boxed{\oint_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum q_0}$$

※ **如何求解含电介质的静电场问题**

方法

① 首先忽略电介质，关注自由电荷，用电介质中的高斯定理算出电位移 $\boldsymbol{D}$ 的分布

② 然后在计算电介质处的电场强度时，用相对介电常数等将 $\boldsymbol{D}$ 转化为 $\boldsymbol{E}$

③ 然后进一步算出 $\boldsymbol{P}$，进而得到极化电荷面密度

例 1

真空中一无限大带电导体板两侧面上的电荷面密度均为 σ，现在导体板右侧充满介电常数为 ε 的均匀电介质。试求：

(1) 导体板左侧面、右侧面上的自由电荷面密度 σ_1，σ_2 以及电介质表面的极化电荷面密度 σ'；

(2) 导体板左、右两侧的电场强度大小和方向。

解析

(1) 根据电介质极化的特点，系统中一共有三处电荷：导体板两侧和电介质左侧，有

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma \quad ①$$

这三个电荷面在将有场强的空间划分为左右两处，这三个电荷面位于中间

由于无限大平板电荷面，在两侧产生的场强大小是相等的；且对于左右两侧，任意一个电荷面产生的电场方向都相反，因此，两个地方的电场强度大小相等，方向相反

$$E_1 = E_2 \quad ②$$

根据电介质中的高斯定理，分别在两边做高斯面，得到

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} \quad ③$$

$$E_2 = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon} \quad ④$$

联立①②③④，解得

$$\sigma_1 = 2\sigma\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+\varepsilon}, \quad \sigma_2 = 2\sigma\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}$$

极化电荷

$$\sigma' = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n} = -P = -D+\varepsilon_0 E_2 = -(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon})\sigma_2 = 2\sigma\frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\varepsilon_0+\varepsilon}$$

(2) 将 (1) 解出的电荷面密度代回就有

$$E_1 = E_2 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{2\sigma}{\varepsilon_0+\varepsilon}, \quad E_1 \text{方向向左}, \quad E_2 \text{方向向右}$$

三　电容器

※ 基础知识：电容器

电容器是一种电路元件，它的最基本属性是电容

概念

电容

两个带有等量异号电荷 Q 的导体组成电容器，其之间的电势差为 $U_{\mathrm{A}}-U_{\mathrm{B}}$，则电容定义为

$$\boxed{C = \frac{Q}{U_{\mathrm{A}}-U_{\mathrm{B}}}}$$

单位：法拉（F），常用的是微法（$1\mu\mathrm{F}=10^{-6}\mathrm{F}$）和皮法（$1\mathrm{pF}=10^{-12}\mathrm{F}$）

多个电阻串联等效为单个电容，其值为

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}$$

多个电阻并联等效为单个电容，其值为

$$C = C_1+C_2+\cdots+C_n$$

※ 如何求解电容器的电容

电容器说到底也是一个静电场问题，求解电容的内核依然是求解静电场

方法

求电容

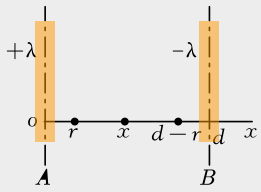
① 设定两极板间的电荷量（等量异号）

② 然后根据电荷求解电场，算出极板间的电势差

③ 根据电容定义计算出电容，最后结果应该与所设的电荷量无关

例 1

设有半径都是 r 的两条平行“无限长”输电线 A 和 B，两轴间相距为 d，且满足 $d \gg r$，求两输电线单位长度的电容。



解析

设 A、B 的电荷线密度分别为 $\pm\lambda$，建立坐标系

根据高斯定理，两导线间 x 处的电场为

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}+\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0(d-x)}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)$$

由电场计算电势差

$$U_{\mathrm{AB}}=\int_L \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_r^{d-r}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{d-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d-r}{r}\approx\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{r}$$

最后计算单位长度电容

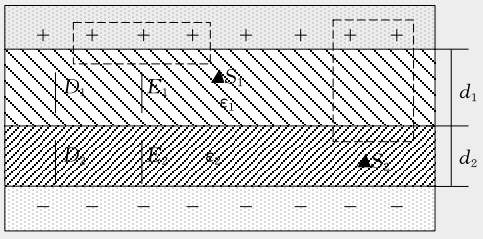
$$C=\frac{q/l}{U_{\mathrm{AB}}}=\frac{\lambda}{U_{\mathrm{AB}}}=\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(d/r)}$$

例 2

平行板电容器两极板面积为 S，间距为 d。在极板间平行地放置两块厚度分别为 d_1 和 d_2 的介质板，其相对介电常数分别为 ε_{r1} 和 ε_{r2}。设电容器充电后两极板分别带有 $\pm q$ 的电荷。试求：

(1) 电容器的电容；

(2) 两介质交界面上的极化电荷面密度.



解析

(1) 首先求 $\boldsymbol{D}$，平行板电容器之间电场强度是均匀分布且向下的，因此视为无限大平板

则由电介质高斯定理有

$$D_1\Delta S_1=\sigma\Delta S_1$$

$$D_2\Delta S_2=\sigma\Delta S_2$$

解得

$$D_1=D_2=\sigma=\frac{q}{S}\text{，方向向下}$$

然后求 $\boldsymbol{E}$：根据

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_r\varepsilon_0\boldsymbol{E}$$

有

$$E_1=\frac{D_1}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}=\frac{q}{\varepsilon_1 S}$$

$$E_2=\frac{D_2}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}=\frac{q}{\varepsilon_2 S}$$

接下来求 U，由电势定义

$$U=\int_0^{d_1}E_1\mathrm{d}l+\int_{d_1}^{d_1+d_2}E_1\mathrm{d}l=E_1d_1+E_2d_2=\frac{qd_1}{\varepsilon_1 S}+\frac{qd_2}{\varepsilon_2 S}$$

最后由电容定义求出电容

$$C=\frac{q}{U}=\frac{q}{\frac{qd_1}{\varepsilon_1 S}+\frac{qd_2}{\varepsilon_2 S}}=\frac{S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}}$$

(2) 两介质在交界面上的极化电荷面密度的总量等于两介质界面上的极化电荷面密度的代数和

介质 1 外表面的法线方向竖直向下，介质 2 外表面的法线方向竖直向上，与电场方向相反

因此有

$$\begin{aligned}\sigma_1'+\sigma_2'&=\boldsymbol{P}_1\cdot\boldsymbol{n}_1+\boldsymbol{P}_2\cdot\boldsymbol{n}_2\\&=\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}-1)\boldsymbol{E}_1\cdot\boldsymbol{n}_1+\varepsilon_0(\varepsilon_{r2}-1)\boldsymbol{E}_2\cdot\boldsymbol{n}_2\\&=\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}-1)E_1-\varepsilon_0(\varepsilon_{r2}-1)E_2\end{aligned}$$

代入 E_1 和 E_2，计算得到

$$\sigma'=\frac{q}{S}\left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}}-\frac{1}{\varepsilon_{r1}}\right)$$

※ 电容器变化问题

往电容器中插入导体板/电介质，电容如何变化

例 3 一空气平行板电容器，两板间距为 d，极板上带电量分别为 $+q$ 和 $-q$，板间电势为 U，忽略边缘效应；将电源断开，在两板间平行插入一厚度为 t（$t<d$）的金属板，则板间电势差变为

	_____，此时电容器的电容值为_____。
解析	与例 2 相同的推导可以得到平行板电容器中场强 E 均匀分布，因此 $U=Ed$ 电源断开意味着电势差发生变化，但带电量 q 不变 根据金属板内场强为 0，可以推得金属板两侧带上电量 $\pm q$ 根据电介质中的高斯定理，除了被金属板占据的区域外，其余部分电场强度不变 因此两极板间的电势 $$U'=E(d-t)=\boxed{\frac{d-t}{d}U}$$ 则此时的电容 $$C'=\frac{q}{U'}=\boxed{\frac{q}{U}\frac{d}{d-t}}$$

此类问题首先要关注插入金属导体前后电源是否断开，这关系到是电势差不变还是电荷量不变，在抓住不变量的基础上，分别分析前后的物理模型，从而得到答案 σ'

严选真题	在平行板电容器内分别插入厚度相同但小于两板间距的铜板和电介质板，下列说法正确的是 A. 电容都不变　　B. 插入金属板的电容增加 C. 插入金属板的电容减小　　D. 插入电介质板的电容减小
解析	由于没有提到断开电源，因此插入前后两板间的电势不变，我们需要考察电荷量的变化 插入金属板后，两板间的真空距离减小，想要达到相同的电势差就需要加大电场，需要更多的电荷量，因此 C=Q/U 增大，选 B

※ 电容器击穿问题

例 4	一球形电容器，内外球面半径分别为 $R_1=2\text{cm}$ 和 $R_2=4\text{cm}$，在两球间充满击穿电场强度为 160kV/m 的电介质；则该电容器能承受的最大电压为_____。
解析	球形电容器的电场分布为 $$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(R_1<r<R_2)$$ 电场强度在 $r=R_1$ 时达到最大值，该值不能超过电介质的击穿场强，因此 $$\frac{q}{4\pi\epsilon R_1^2}\le E_{\text{击穿}}$$ 得到电容器的最大电量 $$q\le 4\pi\epsilon R_1^2 E_{\text{击穿}}$$

由电压和电量的关系

$$U=\int_{R_1}^{R_2}\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

因此

$$U\le\frac{4\pi\varepsilon R_1^2E_{\text{击穿}}}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=R_1^2E_{\text{击穿}}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=\boxed{1.6\times10^3\,\mathrm{V}}$$

三　静电场的能量

※ 基础知识：静电场的能量

前面学习的电场力和电势能本质依然是保守内力做功，若有外力做功，那么变化的应该是整个静电场具有的能量，称为**静电能**

对于点电荷系统

结论

若系统由若干个点电荷组成，则系统的总能量 W 为

$$W=\frac{1}{2}\sum q_iU_i$$

其中 U_i 为在点电荷 q_i 所在处由 q_i 以外其它所有电荷所产生的电势

若电荷连续分布，改写成微元电荷积分的形式即可

若是电容器系统，则

结论

若 C 为电容器的电容，U 为电容器两端的电压差，则电容器的能量为

$$\boxed{W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}Q(U_{\mathrm{A}}-U_{\mathrm{B}})=\frac{1}{2}C(U_{\mathrm{A}}-U_{\mathrm{B}})^2}$$

若是更一般的电场，需要先得到场强和电位移

结论

电场内任意一点的电能密度为

$$\boxed{w_{\mathrm{e}}=\frac{W}{V}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}DE}$$

电场的总能量是对电能密度进行积分

$$\boxed{W=\int_V w_{\mathrm{e}}\mathrm{d}V}$$

例 1	半径为 a 的长直导线，外面套有共轴导体圆筒，圆筒内半径为 b，导线与圆筒间充满相对介电常数为 ε_r 的均匀电介质。设沿轴线单位长度上导线均匀带电 $+\lambda$，圆筒均匀带电 $-\lambda$，忽略边缘效应，沿轴线单位长度的电场能量为_____。
解析	作圆柱高斯面，得 $$D=\frac{\lambda}{2\pi r}\qquad E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$$ $$w_e=\frac{1}{2}DE=\frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$ 这是一个非均匀电场，因此需要在长度为 l 的圆柱套筒范围内进行积分（柱坐标系）： $$W/l=\frac{1}{l}\int_V w_e\mathrm{d}V=\frac{1}{l}\int_a^b\frac{\lambda^2}{8\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^l\mathrm{d}l=\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{b}{a}$$

※ 与外力相关的问题

若系统有外力作用，就需要从功能原理入手，根据能量变化趋势等算出做功、力等

方法	**电场能量变化求解问题** 对电容器等系统加以外力使之发生变化，如抽出、放入电介质，考查过程的做功、力等 ① 假设极板移动一小段微分距离，求出变化前后系统电场能量的表达式 ② 此时可以算出功，也可以对表达式求导算出力等参数 ③ 变化过程中同样要注意哪些量保持不变

例 2	平行板电容器极板面积为 $2\times10^{-2}\mathrm{m}^2$，极板间距离为 $1\times10^{-3}\mathrm{m}$，在电容器内有一介质板（$\varepsilon_r=5$）充满两极板间的全部空间。电容器与 300V 电源相连，充电后将电源切断，再抽出介质板。求 (1) 抽出过程中外力所做的功 (2) 抽出介质板后，两极板间的相互作用力
解析	(1) 根据功能原理，抽出过程中外力所做的功应等于系统前后能量的变化 · 抽出前后电源切断，所以极板上带的电荷量 Q 不变 · 介质板抽出前，电容器的电容和能量为 $$C_0=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}\qquad W_0=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_0}$$ · 介质板抽出后，电容器的电容和能量为

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{d}\quad W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

因此由功能原理

$$A=W-W_0=\frac{1}{2}Q^2(\frac{1}{C}-\frac{1}{C_0})=\frac{1}{2}(C_0U)^2(\frac{1}{C}-\frac{1}{C_0})=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}U^2(\varepsilon_r-1)=\boxed{1.59\times10^{-4}\mathrm{J}}$$

(2) 设两极板间相互作用力为F，这个力表现为吸引力，属于保守内力

这个力使得极板间的距离x有减小的倾向，距离减小$\mathrm{d}x$可视为其中一块极板发生位移$\mathrm{d}x$

此时电场力做功可以表示为

$$\mathrm{d}A=F\mathrm{d}x$$

由势能原理，保守力做功等于电容器能量的减少量

$$\mathrm{d}A=-\mathrm{d}W$$

由于电荷量不变，因此电容器的能量

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2x}{\varepsilon_0 S}$$

因此

$$F=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x}=-\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r^2 SU^2}{2d^2}=\boxed{-0.199\mathrm{N}}$$

第 11 章　稳恒电流

一　电流的概念

※ 基础知识

电荷的定向移动形成电流，用电流强度表征其强弱，其微分形式为电流密度

概念	单位时间内通过导体任一截面的电荷量称为**电流强度**，用 I 表示，是标量 而导体内一点处流过的电荷量称为**电流密度**，用 $\boldsymbol{j}$ 表示，是矢量，与电流强度为微积分关系 $$\boxed{I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=\int_S \boldsymbol{j}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}$$

电流必然与电荷的定向移动速度有关

概念	漂移运动的平均速度 $\boldsymbol{v}_\mathrm{d}$ 称为**漂移速度**，其与电流密度间的关系为 $$\boxed{\boldsymbol{j}=-n\mathrm{e}\boldsymbol{v}_\mathrm{d}}$$ 其中 n 为自由电子数密度，e 为基本电荷

若导体中各点电流密度矢量 $\boldsymbol{j}$ 或通过导体任一闭合曲面的电流强度 I 不随时间变化，则此类电流称为**稳恒电流**

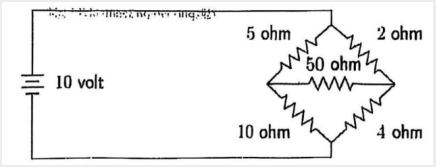
例 1	直径为 2mm 的铜线，通有 1A 的稳恒电流，则铜导线中电子的漂移速度为_____； 已知铜的电子浓度为 $8.5\times10^{28}/\mathrm{m}^3$
解析	由电流密度与稳恒电流的关系，以及铜线直径恒定（截面积恒定，且垂直于电流密度） $$j=\frac{4I}{\pi d^2}$$ 由电流密度与漂移速度的关系 $$v_\mathrm{d}=\frac{4I}{n\mathrm{e}\pi d^2}$$ 代入数据，得 $$v_\mathrm{d}=2.34\times10^{-5}\mathrm{m/s}$$

二　欧姆定律与电阻

※ 欧姆定律

初中我们就学过，流经元件的电流与元件两端的电压成正比，该定律为**欧姆定律**，其中 R 为电路元件的**电阻**，单位为 Ω

$$I=\frac{U}{R}$$

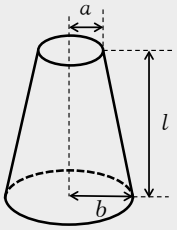
严选真题	如下图所示的电路，如果电阻丝上产生的焦耳热积累到一定程度电阻丝就会熔断。请问哪个电阻丝最先被熔断？  A. 2Ω　　B. 4Ω　　C. 5Ω　　D. 10Ω　　E.50Ω
解析	图中的五个电阻中，2/4=5/10，实际上组成了一个平衡电桥，因此 50 欧姆这个电阻没有电流经过 串联电路中，电阻越大，功率越大，因此排除 2 和 5 欧姆 10 和 4 欧姆实际上可以看成并联，此时电阻越小，功率越大，因此 4 欧姆最大，选 B

※ **电阻的影响因素**

而电阻的决定因素，并非电压和电流

定理	对于一个截面积恒定的元件，它的电阻值与长度成正比，与截面积成反比 $$R=\rho\frac{l}{S}$$ 其中，比例系数为**电阻率**ρ

如果截面积不恒定，我们可以将其分解为微元后求和

严选真题	如图所示，一电阻器具有截头正圆锥体的形状，上下底面半径分别为a和b，高为l。如果锥度很小，可以假定穿过任一横截面的电流密度是均匀的。设电阻率为ρ，计算此锥体的电阻 
解析	取距离顶部为x，长度为$\mathrm{d}x$的一段微元，此时微元体的半径为 $$r=a+\frac{b-a}{l}x$$ 因此截面积为 $$S=\pi(a+\frac{b-a}{l}x)^2$$

因此微元电阻为

$$\mathrm{d}R=\rho\frac{\mathrm{d}x}{S}=\rho\frac{\mathrm{d}x}{\pi(a+\frac{b-a}{l}x)^2}$$

从 0 到 l 积分就得到电阻

$$R=\int_0^l\rho\frac{\mathrm{d}x}{\pi(a+\frac{b-a}{l}x)^2}=\rho\frac{l}{\pi ab}$$

※ 欧姆定律的微分形式

通过推理可以得到欧姆定律的微分形式

定理

对于导体内某处，其电场强度正比于电流密度，比例系数为电阻率

$$\boxed{\boldsymbol{E}=\rho\boldsymbol{j}}$$

三　电路

※ 基尔霍夫定律

电路中各个元件的电压和电流除了满足自身的特性（如欧姆定律）外，还需要满足各个元件之间的电流电压关系，也就是基尔霍夫定律

定理

基尔霍夫定律

任意连接三个以上元件的节点流入流出电流之和为 0（电流定律）

任意回路的元件的电压之和为 0（电压定律）

有了基尔霍夫定律，结合欧姆定律等，就能够完整求解出电路中的电压和电流了。本来这个内容是在工科基础课《电路原理》中重点学习的，也不知道为什么就成了大学物理的重点……

※ RC 电路

RC 电路是由电阻 R、电容 C、电池和开关串联组成的电路，其特点是开关闭合后，电容会充电一段时间直至两侧电压饱和。电路中的电容电压、电流会随时间变化，最终趋于稳定，可以由微分方程求解

总结

对于 RC 电路，若初始时刻电容两端电压为 0，则闭合开关后：

· 电容电压逐渐增加

$$u=U_s(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})$$

· 电流逐渐减小

$$i=\frac{U_s}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

严选真题	对于由电阻 R、电容 C、电池、开关串联组成 RC 电路，初始时电容不带电。当合上开关后，以下关于电流的描述哪个正确？ A. 增加　B. 逐渐增加到一个恒定值　C. 减小　D. 不变
解析	通电后，电容会充电，需要电流供电；充满后，电容处视为断路，电流为 0，因此选 C

第 12 讲　稳恒磁场

一　磁场的产生

※ 基础概念：磁场与磁感应强度

静止电荷间通过电场相互作用，运动电荷间通过磁场相互作用

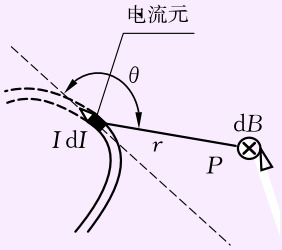
概念	**磁感应强度** 运动电荷（电流）在其周围空间产生磁场，通过磁场对其它运动电荷（导线）施加作用力 这种作用的强弱通过**磁感应强度 $\boldsymbol{B}$**（单位：特斯拉,T）来表示，其构成一个矢量场

电流产生磁场的方向，可以通过右螺旋法则判断

定理	**右螺旋法则** 用右手竖一个👍（这个 emoji 是左手） 若是直线电流产生的磁场，大拇指指向电流方向，则其它四指的绕行方向就是 $\boldsymbol{B}$ 的方向 若是环形电流产生的磁场，其它四指的绕行方向为电流方向，则大拇指指向 $\boldsymbol{B}$ 的方向

※ 求某点处的磁感应强度

显然，电流的方向与大小都会影响其产生的磁场分布

定律	**毕奥-萨伐尔定律** 将一段电流分解为一段段**电流元** $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，每段电流元位于一个点上，可以视为是长 $\mathrm{d}l$ 的线段电流为 I，在这段电流元的方向为 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的方向，该点到空间中一点 P 的距离矢量为 $\boldsymbol{r}$  则这段电流元在 P 处产生的磁感应强度为 $$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$ 其中，I 为电流，$\boldsymbol{r}$ 为电流元指向 P 的矢量，μ_0 为**真空磁导率**（$4\pi\times10^{-7}\mathrm{N/A^2}$）

具体来说，是每段电流微元都会在整个空间内产生微磁场，大小和方向遵循毕奥–萨伐尔定律

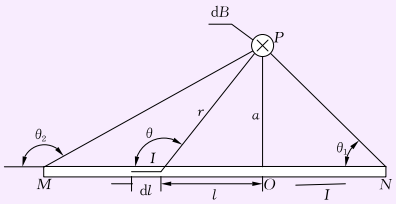
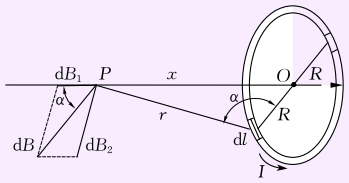
所有电流元产生的磁场进行矢量叠加，就是整个电流产生的磁场，由此我们得到第一种方法

方法	将导线分解为电流元，用毕奥–萨伐尔定律表示出 dB，再根据叠加原理积分

但由于涉及到叉乘，问题通常需要对三维空间进行考察，难度较大，所以如果每道题都这么拆分，就会又难又麻烦，因此，我们通常会把导线分解为常见形状的导线组合，利用这些常见导线的结论直接得到它们产生的磁感应强度，然后再进行叠加，由此可以得到如下基本结论

结论

常用导线模型结论

长直载流导线	载流圆线圈轴线上一点
	
$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$	$B=\frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$
方向由右螺旋法则确定	
无限长直导线距离 a 处 $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$	圆弧形电流（圆心角 θ ）在圆心处 $B=\frac{\mu_0 I}{2R}\frac{\theta}{2\pi}$

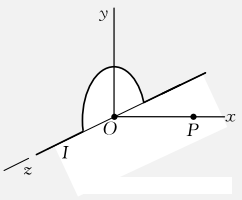
综上所述，基本方法为

方法

① 将产生磁场的电流分解为直线电流、圆环电流等“基本单元”

② 根据上面的已有结论分别求出各部分产生的磁场，再根据叠加原理将它们相加

例 1 如图所示，一无限长直导线，其中部被弯成半径为 r 的半圆环，当导线通有电流 I 时，求垂直于环面的轴线上距环心 o 点 x 处 P 点的磁感应强度。



解 直线部分产生的磁场属于基本结论，可代入公式：

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi x}(\cos 0-\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}})+\frac{\mu_0 I}{4\pi x}(-\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}-\cos\pi)\text{（两段的叠加）}$$

当然也可视为是无限长直导线减去了中间的部分（计算结果相同）：

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}-\frac{\mu_0 I}{4\pi x}(\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}-\frac{-r}{\sqrt{r^2+x^2}})=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\left(1-\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}\right)$$

方向竖直向下（ y 轴负方向）

圆弧部分则没有现成的结论，需要用定律计算

画图，结合立体几何知识可以得出，角度为 θ 时，电流元产生的 $\boldsymbol{B}$ 可以分解为

$$\begin{cases} \mathrm{d}B_x = B\sin\alpha \\ \mathrm{d}B_y = B\cos\alpha\sin\theta \\ \mathrm{d}B_z = B\cos\alpha\cos\theta \end{cases}$$

同时 $\boldsymbol{B}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{L}}{L^3}$ → $B=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Ir\mathrm{d}\theta}{L^2}$，因此

$$\begin{cases} \mathrm{d}B_x = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Ir\sin\alpha}{L^2}\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}B_y = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Ir\cos\alpha}{L^2}\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}B_z = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Ir\cos\alpha}{L^2}\cos\theta\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

因为积分范围是 $\theta=0$ 至 $\theta=\pi$，因此由对称性可得 $B_z=0$，同时

$$\begin{cases} B_x = \dfrac{\mu_0}{4}\dfrac{Ir\sin\alpha}{L^2} = \dfrac{\mu_0}{4}\dfrac{Ir^2}{(r^2+x^2)^{3/2}} \\ B_y = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{Ir\cos\alpha}{L^2} = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{Irx}{(r^2+x^2)^{3/2}} \end{cases}$$

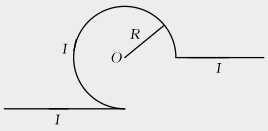
最后加上直导线产生的 B_1 并合成，得到该点的磁感应强度

$$\boldsymbol{B}=\left(-\frac{\mu_0}{4}\frac{Ir^2}{(r^2+x^2)^{3/2}},-\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Irx}{(r^2+x^2)^{3/2}}-\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\left(1-\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}\right)\right)$$

所以，一旦不得不用毕奥–萨伐尔定律来求 $\boldsymbol{B}$，事情就会变得非常的麻烦，对立体几何、空间想象力以及叉乘的掌握都是一个巨大的考验。因此考试考查的基本都是可以只用已知结论求解的题型

例 2

一无限长直导线通有电流 I，如图弯成一个半径为 R 的 3/4 圆，则圆心 o 处的磁感应强度为_____。



解析

根据叠加原理，将该导线分为三个部分：左边的半无限直导线、3/4 圆、右边的半无限直导线

① o 点位于右边的半无限直导线所在直线上，因此这部分导线不在 o 点产生场强

② 左边的半无限直导线可根据基本结论求 $\boldsymbol{B}$：

$$B_1=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos 0-\cos\frac{\pi}{2})=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

由右手螺旋法则，方向垂直纸面向外

③ 3/4 圆符合特殊结论，因此可直接代入公式求解：

$$B_2=\frac{\mu_0 I}{2R}\frac{3/2\pi}{2\pi}=\frac{3\mu_0 I}{8R}$$

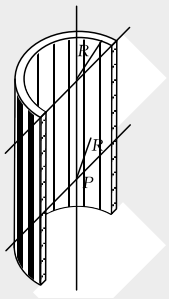
由右手螺旋法则，方向垂直纸面向里

	由此叠加，得到 $$B=B_2-B_1=\frac{3\mu_0 I}{8R}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}=\frac{\mu_0 I}{4R}(\frac{3}{2}-\frac{1}{\pi})$$ 方向垂直纸面向里

前面的例子中，电流的截面都是一个点，如果电流截面是有面积的图形，就需要使用面积微元取微电流，其产生的磁场为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=(\cdots)\mathrm{d}I$$

然后对整个图形的电流积分

例 3	在半径为 R 的无限长半圆筒形金属薄壁中，自上而下通过电流 I，设电流均匀地分布在薄壁上，求轴线上 P 点的磁感应强度。 
解析	薄壁可以看成是连续分布的无限长直电流的叠加，因此使用微元法 从薄壁电流的横截面入手，可以得出电流的线密度为 $$j=\frac{I}{\pi R}$$ 截面是一个半圆弧，因此取微元 $\mathrm{d}I=jR\mathrm{d}\theta$，$0<\theta<\pi$ 由无限长直导线的结论，微元 $\mathrm{d}I$ 在 P 点产生的磁感应强度大小 $$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}I}{2\pi R}=\frac{\mu_0\mathrm{I}}{2\pi^2 R}\mathrm{d}\theta$$ 方向则随 θ 变化而变化，但都与轴线垂直，因此根据右螺旋法则，可以分解为 $$\mathrm{d}B_x=\mathrm{d}B\sin\theta$$ $$\mathrm{d}B_y=\mathrm{d}B\cos\theta$$ 根据积分区间及对称性 $$B_y=0$$

$$B_x=\int_0^{\pi}\frac{\mu_0 \mathrm{I}}{2\pi^2 R}\sin\theta \mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 \mathrm{I}}{\pi^2 R}$$

因此

$$B=\frac{\mu_0 \mathrm{I}}{\pi^2 R}$$

※ **运动电荷产生的磁感应强度**

单个电荷 q 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动产生的磁感应强度

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

当有多电荷（尤其是连续分布电荷）进行匀速运动时，可考察某截面单位时间通过的电荷量而求 I

方法	**求解运动电荷产生的磁感应强度** ① 设定一个时间段，选择一个与运动方向垂直的截面 ② 求该时间段内通过的电荷量，从而求出等效电流 ③ 用等效电流来求磁场

需要注意的是，如果电荷在其运动方向以外的方向上连续分布，这也是一种连续分布的电流

例 4	一圆盘的半径为 R，中心点为 o，圆盘表面上均匀分布着面密度为 σ 并与圆盘固结在一起的电荷。假定圆盘以角速度 ω 绕对称轴转动，求轴上一点的磁感应强度。
解析	圆盘转动时，其上的电荷作圆周运动，可以等效为环形电流 由于圆盘的径向上也有电荷分布，因此需要将圆盘分解为一个个环形微元 对于半径为 r，宽 $\mathrm{d}r$ 的圆环，在时间 Δt 内，圆盘转动 $\Delta\theta=\omega\Delta t$，流过截面的电荷量为 $$q=\sigma r\Delta\theta \mathrm{d}r$$ 由此可得出圆环的等效电流为 $$\mathrm{d}I=\frac{q}{\Delta t}=\sigma\omega r\mathrm{d}r$$ 因此根据已有结论，在圆盘轴上一点（距圆心 x），该圆环产生的磁感应强度为 $$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 r^2\mathrm{d}I}{2(r^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0 r^3\sigma\omega\mathrm{d}r}{2(r^2+x^2)^{3/2}}$$ 因此对整个圆盘积分（提示：用分部积分法）：

$$B=\int_0^R \frac{\mu_0 r^3\sigma\omega \mathrm{d}r}{2(r^2+x^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R \frac{r^3}{(r^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\left[\frac{2x^2+R^2}{\sqrt{x^2+R^2}}-2x\right]$$

二　安培环路定理

※ 基础知识：安培环路定理

我们在前面学习了静电场的环路定理，知道任意环路的电场强度积分恒为 0

磁场作为类似概念自然也有环路定理，不过，它的环路积分就和电流有关了

定理

安培环路定理

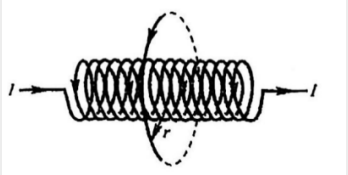
在稳恒磁场中，磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 沿任何回路的线积分与穿过该回路围成的面的电流的代数和

$$\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0\sum I_{内}$$

电流方向与积分路径绕行方向呈右螺旋关系时取正号，反之取负号

严选真题

对于密绕载流长直螺线管其内部 $\boldsymbol{B}=\mu_0 nI$（n 为单位长度上线圈的匝数），其外部磁场趋近于零。



在外部环绕一周的垂直于径向的环路积分

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0 \quad (1)$$

但从安培环路定理来看，环路中有电流 I 穿过，环路积分应为

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I \quad (2)$$

这样出现了矛盾。以下选择哪个对？（多选题）

A. (1) 式正确　　B. (2) 式正确

C. 螺线管越长，(1) 式越正确　　D. (2) 式给出的磁场大小与 n 无关

解析

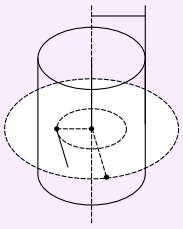
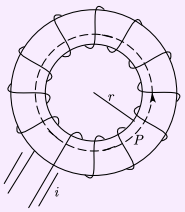
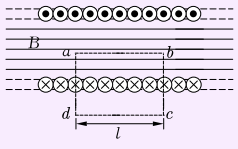
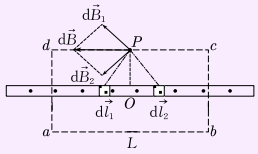
①式的陷阱在于 B 趋向于 0 的同时，环路实际也趋向于无穷大，积分结果不可能为 0，因此 A 和 C 错，不管 n 是多少，导线只穿过了环路构成的曲面一次，因此选 BD

严选真题	对于一条长度为L，通有电流I的导线 （1）利用毕奥–萨伐尔定律求在与导线中心的垂直距离为a的点上的磁场； （2）如果$L \gg a$，可视为无穷长导线，利用安培环路定律近似地求解上述位置的磁场； （3）讨论当L/a大于多少时，用安培环路定律得到的近似结果与用毕奥–萨伐尔定律的结果误差在 10%以内？如果要求误差小于 1%结果又如何？
解析	(1) 根据讲义结论 $$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$ 处于导线中心时，$\cos\theta_1=\frac{L}{\sqrt{4a^2+L^2}}$，$\cos\theta_2=-\frac{L}{\sqrt{4a^2+L^2}}$，因此 $$B=\frac{L}{\sqrt{4a^2+L^2}}\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$ (2) 由安培环路定理 $$2\pi a B=\mu_0 I$$ 因此 $$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$ (3) 相对误差 $$\mathrm{err}=\frac{\frac{\mu_0 I}{2\pi a}-\frac{L}{\sqrt{4a^2+L^2}}\frac{\mu_0 I}{2\pi a}}{\frac{L}{\sqrt{4a^2+L^2}}\frac{\mu_0 I}{2\pi a}}=\frac{\sqrt{4a^2+L^2}}{L}-1=\sqrt{4(\frac{a}{L})^2+1}-1$$ 若误差在 10%以内 $$\mathrm{err}<10\%\Rightarrow\frac{L}{a}>4.34$$ 若误差在 1%以内 $$\mathrm{err}<0.01\Rightarrow\frac{L}{a}>14.29$$

※ 用安培环路定理求磁感应强度

与高斯定理类似，如果我们选的回路上的每个点的磁感应强度都与该回路在此处的绕行方向一致，安培环路定理就可以从积分式简化为代数式，从而反向求解磁感应强度。这意味着电流的分布要具有一定的对称性，常见的模型如下所示

结论	**可以使用安培环路定理求解的模型**

无限长载流圆柱体	载流螺绕环	长直载流螺线管	无限大载流平面
			
$B=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r>R\\ \dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}, & r<R\end{cases}$	$B=\dfrac{\mu_0 NI}{2\pi R}=\mu_0 nI$	$B=\mu_0 nI$	$B=\dfrac{\mu_0}{2}j$
	n：单位长度环绕的线圈匝数		j：电流线密度

方向由右螺旋法则确定

安培环路定理可以继续和磁场叠加原理结合：一些因不对称无法适用安培环路定理的磁场可以分解为多个可以适用的磁场的叠加

例 4

在一半径为 R 的长圆柱形导体内，有一半径为 a 的圆柱形空腔，它们的轴线相互平行，间距为 d。设该导体载有分布均匀的电流 I，求空腔内任一点的磁感应强度

解析

看似这个磁场是不对称的，无法适用安培环路定理，但实际上这个磁场可以看成是两个无限长载流圆柱体产生的磁场的叠加，定理分别适用

如图所示，设点 O 至点 P 的矢径为 $\boldsymbol{r}$，点 O' 至点 P 的矢径为 $\boldsymbol{r}'$

对于半径 R 的载流圆柱体产生的磁场（设电流密度矢量 j），其电流密度应当为

$$\boldsymbol{j}=\frac{I}{\pi(R^2-a^2)}\boldsymbol{k}$$

根据已有结论，其在 P 点产生的场强

$$B=\frac{\mu_0 rj}{2}$$

结合右螺旋法则，可以表示为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 j}{2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}$$

对于半径 a 的载流圆柱体产生的磁场，可视为电流反向，其在 P 点产生的场强

$$\boldsymbol{B}'=-\frac{\mu_0 j}{2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}'$$

则由叠加定理

$$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}'=\frac{\mu_0 j}{2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}-\frac{\mu_0 j}{2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}'=\frac{\mu_0 j}{2}\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{\mu_0 j}{2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{d}$$

其中 $\boldsymbol{d}$ 为点 O 指向 O' 的矢径，因此空腔内的场强为定值：

$$B=\frac{\mu_0}{2}\frac{I}{\pi(R^2-a^2)}(R-a)=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{R+a}$$

三　磁通量与磁场高斯定理

※ 基础知识：磁通量的定义与磁场高斯定理

概念

磁通量

磁感应强度 B 在某个曲面 S 上的第二类曲面积分称为**磁通量**

$$\boxed{\Phi_m=\int_S \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}$$

对于闭合曲面，规定外法线方向为法线正方向

磁通量的定义与电通量一致，同样有高斯定理，只不过不再和电流有关，而是一个固定数值

概念

磁通量的高斯定理

任意闭合曲面的磁通量为 0

$$\Phi_m=\oint_s \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

※ 求解磁通量

方法

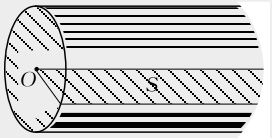
① 求出磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 的分布

② 取曲面 S 上的面积微元，规定正法线方向，表示出 $\boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，然后进行积分

一般只考查平面的磁通量，积分会相对简单很多

例 1

一根长铜线载有分布均匀的电流 I，在铜线内部作一假想的平面 S，如图所示。求通过每米导线内的 S 平面的磁通量。



解析

设铜线半径为 R，由安培环路定理，根据已知结论，得到磁感应强度分布

$$B=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$$

由于 S 平面上的磁感应强度只随 r 变化，将 S 分割为长 l 宽 $\mathrm{d}r$ 的小长条，其上的磁通量

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{m}}=\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0 Il}{2\pi R^2}r\mathrm{d}r$$（设 S 的法矢量与 B 同向）

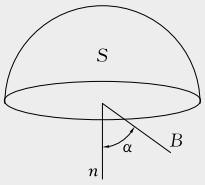
积分得到单位长度磁通量

$$\frac{\Phi_{\mathrm{m}}}{l}=\frac{1}{l}\int_0^R\frac{\mu_0 Il}{2\pi R^2}r\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

如果要求的面太复杂，可以利用高斯定理，换一个边界相同但是更好算的面

例 2

在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场中，作一半径为 r 的半球面 S，S 边线所在平面的法线方向单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的夹角为 α，则通过半球面 S 的磁通量（取弯面向外为正）为_____。



解析

由磁场高斯定理

$$\Phi_{\mathrm{m}}=\oint_{S+S'}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}+\int_{S'}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$$

对于边线平面 S'

$$\int_{S'}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=BS\cos\alpha=\pi r^2B\cos\alpha$$

因此

$$\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\int_{S'}\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\pi r^2B\cos\alpha$$

因为电磁感应部分经常需要求磁通量，所以磁通量的计算很少单独考查

四　磁场对电流的作用力

※ 安培力

安培力是磁场作用于电流的作用力，也是洛伦兹力的宏观表现

概念　**安培力**

对于某电流元 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，该处磁感应强度 $\boldsymbol{B}$，则其受到**安培力**

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$$

则一段导线受到的安培力，根据力的叠加原理相加（积分）

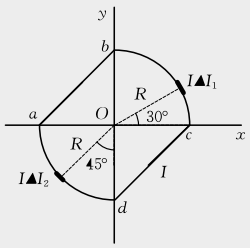
$$\boldsymbol{F}=\int_L I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$$

均匀磁场中，一段弯曲导线受到的安培力等于同一起终点的直导线受到的安培力

$$\boldsymbol{F}=I\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}$$

例 1

如图所示，在 xOy 平面（即纸面）内有一载流线圈 $abcda$，其中 bc 弧和 da 弧皆为以 o 为圆心，半径为 R 的 $1/4$ 圆弧，$\overline{ab}$ 和 $\overline{cd}$ 皆为直线，电流 I，其流向沿 $abcda$ 的绕向；电流元 $\Delta l_1=\Delta l_2=\Delta l$，位置如图。设线圈处于磁感应强度 B 的均匀磁场中，$\boldsymbol{B}$ 方向沿 x 轴正方向。试求以下电流元或载流导线在均匀磁场 $\boldsymbol{B}$ 中的受力：



(1) 电流元 $I\Delta l_1$ 和 $I\Delta l_2$ 所受安培力 $\Delta\boldsymbol{F}_1$ 和 $\Delta\boldsymbol{F}_2$ 的大小和方向；

(2) 直线段 $\overline{ab}$ 和 $\overline{cd}$ 所受到的安培力 $\boldsymbol{F}_{ab}$ 和 $\boldsymbol{F}_{cd}$ 的大小和方向；

(3) 圆弧段 bc 弧和 da 弧所受到的安培力 $\boldsymbol{F}_{bc}$ 和 $\boldsymbol{F}_{da}$ 的大小和方向.

解析

(1) 由安培力的微分式

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$$

代入解得

$$\Delta F_1=I\Delta l_1 B\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}I\Delta lB \qquad \text{方向垂直纸面向外}$$

$$\Delta F_2=I\Delta l_2 B\sin 135^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}I\Delta lB \qquad \text{方向垂直纸面向内}$$

(2) 直线段的长度均为 $\sqrt{2}R$，则直导线所受安培力

$$F_{ab}=I\sqrt{2}RB\sin 45^\circ=IRB \quad \text{方向垂直纸面向里}$$

$$F_{cd}=I\sqrt{2}RB\sin 135^\circ=IRB \quad \text{方向垂直纸面向}$$

(3) 此时

$$\mathrm{d}F = IRB\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)\mathrm{d}\theta = IRB\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

则

$$F_{bc} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} IRB\cos\theta\mathrm{d}\theta = IRB \quad \text{方向垂直纸面向外}$$

$$F_{ad} = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} IRB\cos\theta\mathrm{d}\theta = IRB \quad \text{方向垂直纸面向里}$$

当然，可以直接利用结论，计算 bc 和 ad 直导线所受安培力

※ **磁矩**

磁矩是研究磁力矩时衍生的概念

概念

磁矩

某线圈的电流为 I，匝数为 N，回路包围的面积为 S，则该线圈的磁矩为

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}} = NIS\boldsymbol{e}_n$$

例 1

从经典观点看，氢原子可看作是一个电子绕核作高速旋转的体系，已知电子和质子的电荷分别为 $-e$ 和 e，电子质量为 m_e，氢原子的圆轨道半径为 r，电子作平面轨道运动，则电子轨道运动的磁矩为_____.

解析

由库仑定律和圆周运动，电子绕核的线速度

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m_e\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \frac{e}{\sqrt{4\pi m_e\varepsilon_0 r}}$$

单位时间内通过的电荷量为 $e\times$ 单位时间通过电子数目（= 电子单位时间绕圈数目 = 频率）

因此根据电流定义：

$$I = e\frac{v}{2\pi r}$$

磁矩

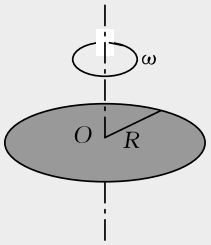
$$p_{\mathrm{m}} = IS = e\frac{v}{2\pi r}\pi r^2 = \frac{e^2}{4}\sqrt{\frac{r}{\pi\varepsilon_0 m_e}}$$

磁矩也是可以叠加的

例 1

如图所示，一半径为 R 的塑料圆盘，表面上均匀分布有电量为 $+q$ 的电荷，圆盘以角速度 ω 绕通过中心且与盘面垂直的轴转动。则该圆盘的磁矩 p_{m} 的大小为_____；方向

为_____。



解析

前面的例题中已经解过，半径为r处的等效环形电流强度

$$\mathrm{d}I=\sigma\omega r\mathrm{d}r=\frac{q}{\pi R^2}\omega r\mathrm{d}r$$

则这个环形电流的磁矩

$$\mathrm{d}p_{\mathrm{m}}=S\mathrm{d}I=\pi r^2\cdot\frac{q}{\pi R^2}\omega r\mathrm{d}r=\frac{q\omega}{R^2}r^3\mathrm{d}r$$

方向沿轴向上，因此积分得到

$$p_{\mathrm{m}}=\int_0^R\frac{q\omega}{R^2}r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{4}q\omega R^2$$

方向沿轴向上

※ 载流平面线圈的磁力矩

概念

一般情况下，线圈受到的力矩

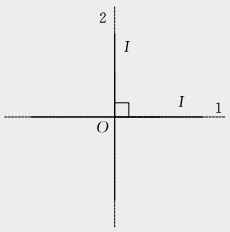
$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times(I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B})}$$

均匀磁场中，线圈受到的力矩

$$\boxed{\boldsymbol{M}=\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}\times\boldsymbol{B}}$$

例 1

如图所示，两根相互绝缘的无限长直导线 1 和 2 绞接于 o 点，两导线间的夹角为 90°，通有相同的电流I，求距导线 2 r 处，导线 1 的单位长度线段所受磁力对 o 点的力矩大小



解析

导线 2 产生的磁感应强度为 $\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$，方向垂直纸面向里（$r>0$）或向外（$r>0$）

导线 1 r 处 $I\mathrm{d}l=I\mathrm{d}r$，方向向右，因此力矩

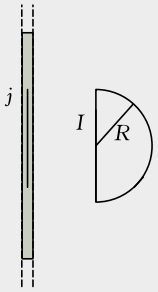
$$\mathrm{d}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times(I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B})\ \rightarrow\ \mathrm{d}M=rI\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}\mathrm{d}r$$

因此单位长度线段所受磁力对 o 点的力矩大小为

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}r}=\frac{\mu_0 I^2}{2\pi}$$

例 2

如图所示，在电流密度为 j 的均匀载流无限大平板附近，有一载流为 I，半径为 R 的半圆形刚性线圈，其线圈平面与载流大平面垂直，线圈所受磁力矩为_____；若线圈平行于载流大平面，则所受磁力矩大小为_____。



解析

均匀载流无限大平板在右侧附近产生的磁感应强度为

$$\frac{\mu_0}{2}j$$

方向垂直纸面向里

因为是均匀磁场，所以可用磁矩计算磁力矩

由于磁矩与线圈平面垂直，线圈平面与载流大平面垂直时，磁矩平行于 $\boldsymbol{B}$，因此磁力矩为 0

线圈平行于载流大平面时，磁矩垂直于 $\boldsymbol{B}$，因此

$$M=p_{\mathrm{m}}B\sin 90^\circ=\frac{\mu_0\pi R^2 Ij}{4}$$

※ 磁力做功

结论

一个任意的闭合载流回路，在磁场中改变位置或形状时，磁力或磁力矩做的功

$$\boxed{\mathrm{d}A=I\mathrm{d}\Phi}$$

例 1

由细软导线做成的圆环，半径为 R，流过电流 I，将圆环放在磁感应强度 B 的均匀磁场中，磁

	场的方向与圆电流的磁矩方向一致，今有外力作用在导线环上，使其变成正方形，则在维持电流不变的情况下，外力克服磁场力所作的功是_____。
解析	导线由圆形变成正方形，周长不变，面积变化。设正方形边长 a，则有 $$2\pi R=4a \quad \text{因而} \quad a=\frac{\pi R}{2}$$ 则磁场力做功 $$A=I\Delta\Phi=IB\Delta S=IB(a^2-\pi R^2)=IB\pi R^2(\frac{\pi}{4}-1)$$ 因此外力克服磁场力做功 $$-A=IB\pi R^2(1-\frac{\pi}{4})$$

五　磁场对带电粒子的作用力

※ 基础知识：电荷在磁场中的受力与运动

概念	磁场作用于运动电荷的力称为**洛伦兹力**，若运动电荷的速度为 $\boldsymbol{v}$，某点磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$，则其受到的洛伦兹力为 $$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

严选真题	**多选题** 一个在磁场中运动的带电粒子受到洛伦兹力 $\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$，以下哪种说法正确？ A. $\boldsymbol{v}$ 可以平行于 $\boldsymbol{B}$　　B. $\boldsymbol{v}$ 一定垂直于 $\boldsymbol{B}$ C. $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的方向不能在一条直线上　　D. $\boldsymbol{F}$ 一定与 $\boldsymbol{v}$ 或者 $\boldsymbol{B}$ 垂直
解析	根据叉乘的原理，$\boldsymbol{F}$ 一定垂直于 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{v}$，且若 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 共线，则 F 为 0，因此选 CD

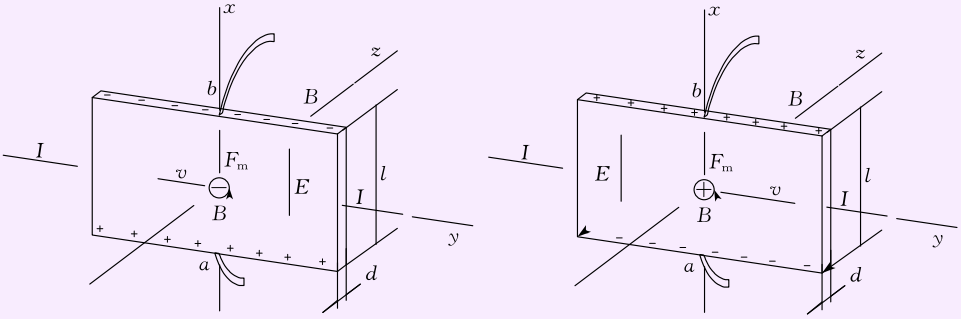
因此，带电粒子在磁场中受到的力始终垂直于自己的运动方向，在磁场中会做圆周运动

这是高考经典的大题内容，各位同学肯定比我熟悉（作者当时没有选物理）

结论	带电粒子在匀强磁场中做匀速圆周运动，其半径为 $$R=\frac{mv}{qB}$$

严选真题	**选择题** 回旋加速器中电子在加速过程中做圆周运动，而且半径一圈比一圈大。如果讨论相邻圆周间的间隔（半径之差），以下说法哪一个对？ A. 间隔相等　B. 间隔逐渐增加　C. 间隔逐渐减小　D. 先减少后增加
解析	带电粒子每次经过狭缝后，获得的动能是一致的，因此粒子的动能正比于圈数 n 也就是 $$E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2\propto n\ \rightarrow\ v\propto\sqrt{n}$$ 根据高中知识 $$R=\frac{mv}{qB}\propto v\propto\sqrt{n}$$ 因此半径的增速是越来越慢的，间隔也越来越小，选 C

※ 霍尔效应与霍尔元件

概念	**霍尔效应** 处在均匀磁场中的通电导体薄板，当电流方向与磁场方向垂直时，则在垂直于磁场和电流方向的薄板上、下两端之间出现电势差，称为**霍尔效应** 

① **判断电势差方向**

结论	载流子带负电荷，则 $\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{B}$ 的方向为 $\boldsymbol{E}$ 的方向；载流子带正电荷，则 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{I}$ 的方向为 $\boldsymbol{E}$ 的方向

若记不清结论，就先推导洛伦兹力的方向，再根据电荷得出结论，有时候是已知电势差，判断磁场方向、电流方向、载流子，也要熟练

② **霍尔元件的电压**

结论	霍尔元件的电压称为**霍尔电压**，其值为

$$\boxed{U_{\mathrm{H}}=R_{\mathrm{H}}\frac{IB}{d}}$$

其中，d 为霍尔元件的厚度，R_{H} 为**霍尔系数**，其值为

$$\boxed{R_{\mathrm{H}}=\frac{1}{nq}}$$

其中，n 为载流子浓度

例 1

如图所示，把一宽 l 为 $2.0\times10^{-2}\mathrm{m}$，厚度 d 为 $1.0\times10^{-3}\mathrm{m}$ 的铜片放在磁感应强度 $B=1.5\mathrm{T}$ 的均匀磁场中，如果铜片中通有 $200\mathrm{A}$ 的电流，则铜片_____（填“左”或“右”）的电势高，霍尔电势差为_____。（已知铜的电子浓度为 $8.5\times10^{28}/\mathrm{m}^3$）

（本题的图丢了）

解析

由图知，载流子为负电荷，$\boldsymbol{B}$ 竖直向上，I 垂直纸面向里

由右螺旋法则，电场方向向右，因此左侧电势高

由霍尔电势差公式

$$U_{\mathrm{H}}=R_{\mathrm{H}}\frac{IB}{d}=\frac{1}{ne}\frac{IB}{d}=2.2\times10^{-5}\mathrm{V}$$

第 13 章　磁场中的磁介质

一　磁介质的响应

※ 基础知识：磁介质如何响应外磁场

概念	分子本身具有的磁矩称为**固有磁矩** $\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}$，可认为由等效的圆电流（**分子电流**）产生

由于磁矩取向无规则，它们相互抵消，导致磁介质不显磁性

概念	磁介质处于外磁场时，每个分子均产生与外磁场方向相反的**附加磁矩** $\Delta\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}$ 顺磁质的 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}$ 远大于 $\Delta\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}$，且分子受到的磁力矩尽可能使固有磁矩转向外磁场方向 抗磁质的 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{m}}$ 为 0，附加磁矩是产生磁化的唯一原因

因此所有的物质都具有抗磁性，但不是所有的物质都表现出抗磁性

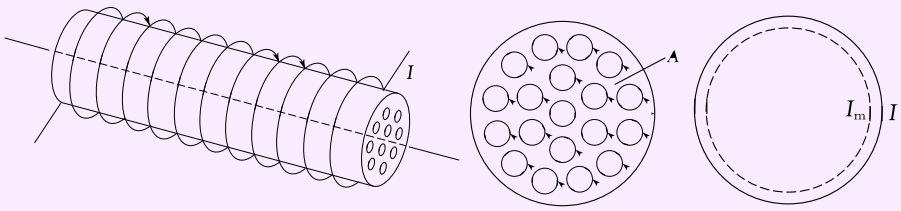
严选真题	**选择题** 下列说法正确的是 A. 随着温度增加，顺磁性越强 B. 把顺磁性物质放入磁场中，其内部磁感应强度减小 C. 把铁磁性物质放入磁场中，其内部磁感应强度加强，外表面附近磁感应强度不变 D. 所有的物质都具有抗磁性
答案	D

※ 磁化强度与磁化电流

与电场类似，磁介质响应磁场也有与极化强度类似的概念

概念	某单位体积微元内分子总磁矩之和称为**磁化强度** $\boldsymbol{M}$ 其中顺磁质 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{B}_0$ 同向，抗磁质 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{B}_0$ 反向

如同电介质表面产生极化电荷一样，磁介质表面也会产生磁化电流

概念	分子电流叠加的结果是在磁介质表面产生**磁化电流**  且**磁化电流线密度** j_{m} 等于该点磁化强度 $\boldsymbol{M}$ 沿表面的切向分量，即

$$\boxed{j_{\mathrm{m}}=|\boldsymbol{M}|}$$

※ **磁场强度**

类似地，在各向同性的磁介质里，$\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{M}$ 存在线性关系，因此可以定义与电位移类似的概念来简化它们之间的关系

概念

定义**磁场强度** $\boldsymbol{H}$ (单位：A/m)为

$$\boxed{\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}}$$

对于各向同性的磁介质，磁场强度和磁化强度的关系为

$$\boxed{\boldsymbol{M}=\chi_{\mathrm{m}}\boldsymbol{H}}$$

其中，χ_{m} 为介质的**磁化率**，顺磁质为正，抗磁质为负

同样也可以定义类似电导率的磁导率

概念

定义**相对磁导率**

$$\mu_r=1+\chi_{\mathrm{m}}$$

再定义**磁导率**

$$\mu=\mu_0\mu_r$$

因此这些物理量之间的联系是

$$\boxed{\mu_0(1+\chi_{\mathrm{m}})=\mu_0\mu_r=\mu}$$

因此，我们可以得到磁感应强度和磁场强度间的直接联系

※ **磁介质中的安培环路定理**

定理

磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 沿任意闭合路径 L 的环流，等于穿过该路径所围面积的传导电流的代数和

$$\boxed{\oint_L \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\sum I_0}$$

※ **求解磁介质中的磁感应强度**

方法 **磁介质下磁场问题求解流程**

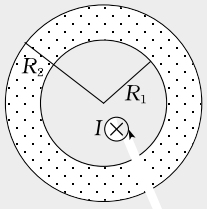
① 用磁介质下的安培环路定理求出磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的分布

② 根据 $\boldsymbol{H}$ 、$\boldsymbol{B}$ 、$\boldsymbol{M}$ 间的关系，求解出 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{M}$ （有时已知这俩，反过来求 μ ）

③ 根据 $\boldsymbol{M}$ 与 j_{m} 的关系，得到 j_{m} 、I_{m} 等

例 1

如图所示，一磁导率为 μ_1（$>\mu_0$）的无限长圆柱形导体半径为 R_1，其中均匀地通有电流 I、方向垂直向里；导体外包一层磁导率为 μ_2（$>\mu_1$）地同轴圆筒形不导电的磁介质，其外半径为 R_2；外部是真空。求：



(1) 磁场强度和磁感应强度的空间分布；

(2) 半径为 R_2 处介质表面上的磁化电流线密度的大小和方向、总磁化电流强度。

答案

(1) 这是一个圆柱电流模型，取半径为 r 的同心圆形环路，由磁介质中的安培环路定理

$$\begin{cases} 2\pi rH = I, & r \geq R_1 \\ 2\pi rH = I\dfrac{r^2}{R_1^2}, & r < R_1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad H = \begin{cases} \dfrac{I}{2\pi r}, & r \geq R_1 \\ \dfrac{Ir}{2\pi R_1^2}, & r < R_1 \end{cases}$$

空间内磁导率呈现三处分布，由 $B=\mu H$，得到磁感应强度分布

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}, & r > R_2 \\ \dfrac{\mu_2 I}{2\pi r}, & R_2 > r > R_1 \\ \dfrac{\mu_1 Ir}{2\pi R_1^2}, & r < R_1 \end{cases}$$

(2) 半径 R_2 处的磁化强度

$$M = \chi_{\mathrm{m}} H = (\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1)H = \frac{I}{2\pi R_2}(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1)$$

由于 $\mu_2 > \mu_1 > \mu_0$，因此 $\boldsymbol{M}$ 与 $\boldsymbol{H}$ 同向，从而

$$j_{\mathrm{m}} = M = \frac{I}{2\pi R_2}(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1)$$

方向垂直纸面向外

j_{m} 在半径 R_2 的圆周上均有分布，因此总磁化电流强度

$$I_{\mathrm{m}} = \int_0^{2\pi} j_{\mathrm{m}} \mathrm{d}l = 2\pi R_2 j_{\mathrm{m}} = I(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1)$$

二 铁磁质的特性

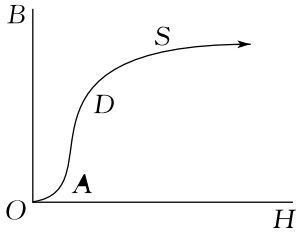
除了顺磁质和抗磁质之外，还有一类磁介质为**铁磁质**，它的特点是磁化率不恒定并且存在滞回，由于

$B=\mu H$，故通过 $B-H$ 曲线研究这一性质

※ 起始磁化曲线

当铁磁质从未磁化状态开始加外磁场测得的曲线，呈现“S”形，说明 μ 不是常数

随着 H 增加，B 会趋于一个极限值（饱和磁感应强度）



※ 磁滞回线

概念

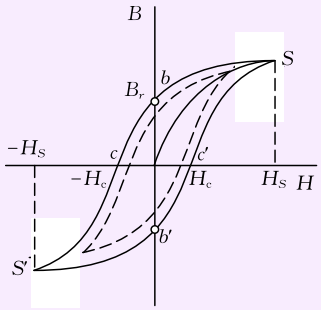
① 铁磁质达到饱和状态后，当减小 H 时，B 的减小呈现出滞后性（磁滞现象）

其结果为 $H=0$ 时，$B>0$，称为**剩磁感应强度** B_r

② 需要继续减小 H（反向增大）至 $H=-H_c$ 时才能让 $B=0$，此时的 H_c 称为**矫顽力**

③ 此后再减小 H（反向增大），铁磁质开始反向磁化至反向饱和状态，B 会加速减小，回到磁化曲线

④ 再沿正方向增加 H，B 又会滞后于 H 达到饱和状态，形成磁滞回线

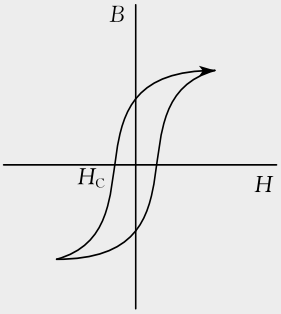


总结：铁磁质在沿着初始磁化曲线磁化后，要么沿着磁化曲线继续增大，要么沿着磁滞回线往复循环

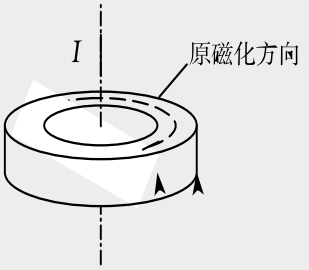
例 1

磁滞回线

铁氧体的矩形磁滞回线如图(a)所示。图(b)为用这种材料制作的电子计算机中存储元件的环形磁芯，其外半径为 0.8mm、内半径为 0.5mm、高 0.3mm，矫顽力为 $H_C=500/\pi\,\mathrm{A/m}$。磁芯已被磁化，方向如图所示。



(a)



(b)

对磁芯施加轴向电流达到_____A 时，磁芯中磁化方向开始翻转，若需使磁芯中自内向外的磁化方向全部翻转，脉冲电流的峰值至少需要达到_____A。

答案

根据安培环路定理，磁环处的磁场强度

$$H=\frac{I}{2\pi r}$$

设内半径 r_1，外半径 r_2，则 r_1 处磁场强度最大，最先翻转，因此

$$H_c=\frac{I_1}{2\pi r_1}\Rightarrow I_1=2\pi r_1 H_c=2\pi\times 0.5\text{mm}\times\frac{500}{\pi}\text{A/m}=0.5\text{A}\quad\text{（第一空）}$$

当 r_2 处磁场强度为 H_c 时，磁芯中磁化方向全部翻转，因此

$$H_c=\frac{I_2}{2\pi r_2}\Rightarrow I_2=2\pi r_{12} H_c=2\pi\times 0.8\text{mm}\times\frac{500}{\pi}\text{A/m}=0.8\text{A}\quad\text{（第二空）}$$

第 14 讲　电磁感应

一　感应电动势

※ 基础知识：法拉第电磁感应定律与楞次定律

概念

全磁通

若导体由多个回路串联而成时，每个回路的磁通量之和称为**全磁通** Ψ，也就是

$$\Psi=\Phi_1+\Phi_2+\cdots+\Phi_n$$

最常见的就是螺线圈以及螺绕环，这一概念的提出是为了解释电磁感应现象

概念

电流回路所包围面积的全磁通 Ψ 发生变化时，回路中会产生**感应电动势** ε_i

$$\boxed{\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}}$$

正负与方向：通常规定与原磁感应强度方向成右螺旋关系的回路方向为正方向，使得 Ψ 一定为正

此时若 ε_i 为正，说明其方向与回路绕行方向相同，否则相反

感应电流的方向，也可以通过楞次定律定性分析

概念　闭合回路中感应电流的方向，总是使它所激发出的磁场阻止引起感应电流的原磁通量的变化

※ 基础知识：动生电动势与感生电动势

法拉第定律其实是一种规律总结，关于感应电动势究竟是怎么产生的，实质上有两种不同的原因机理，这两种原因都能够归结到磁通量的变化，第一种是导体在磁场中运动产生的电动势，其机理是导体内电荷受到洛伦兹力，改变运动状态产生的

概念

动生电动势

由于导体或回路在（稳恒）磁场中运动产生的电动势称为**动生电动势**

对于线元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，其上产生的动生电动势

$$\boxed{\mathrm{d}\varepsilon_i=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}$$

结果的正/负号表明电动势方向与 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 相同/相反

第二种是磁场变化产生的电动势，其机理是先生成电场，然后生成电动势

概念

感生电动势

导体所处磁场发生变化，通过在周围激发**涡旋电场**所产生的电动势称为**感生电动势**

涡旋电场与变化磁场的关系

$$\oint_L \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

涡旋电场线与$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$呈左螺旋关系

此时，感生电动势等于单位正电荷绕闭合回路一周涡旋电场力所做的功

$$\boxed{\varepsilon_i = \oint_L \boldsymbol{E}_i \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}$$

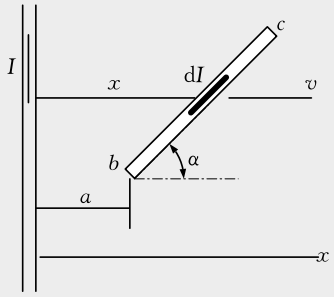
※ 求动生电动势：定义法

对于同一个情形，我们既可以使用经验的磁通量法，也可以从机理入手。两种方法各有各的优势，需要根据情形特点加以使用

例 1

动生电动势

如图所示，一长直导线通有电流$\boldsymbol{I}$，有一长l的金属棒bc与x方向成α角，以速度$\boldsymbol{v}$垂直于长直导线作匀速运动。当棒的$\boldsymbol{b}$端距导线为a时，求金属棒的电动势。



解答

首先，长直导线产生的磁感应强度分布为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\text{，向内为正}$$

由于金属棒不同位置受到的磁感应强度不同，因此需要在x方向上分解为微元，如图所示

(暂时无图)

由于$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{B}$垂直，因此叉乘方向竖直向上，因此$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$与$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$夹角为$\frac{\pi}{2}-\alpha$

于是表示出

$$\mathrm{d}\varepsilon_i = vB\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\mathrm{d}l$$

由几何关系

$$\mathrm{d}x = \cos\alpha\,\mathrm{d}l$$

从而

$$\mathrm{d}\varepsilon_i = vB\sin\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha} = \frac{v\mu_0 I}{2\pi x}\tan\alpha\,\mathrm{d}x$$

积分

$$\varepsilon_i = \int_a^{a+l\cos\alpha}\frac{v\mu_0 I}{2\pi x}\tan\alpha\,\mathrm{d}x = \frac{v\mu_0 I}{2\pi}\tan\alpha\ln\frac{a+l\cos\alpha}{a}$$

结果 >0，因此电动势由 b 指向 c

※ 求感生电动势：涡旋电场法

感生电动势的求法与安培环路定理类似，需要基于特殊的磁场分布及变化（也就是高度对称）

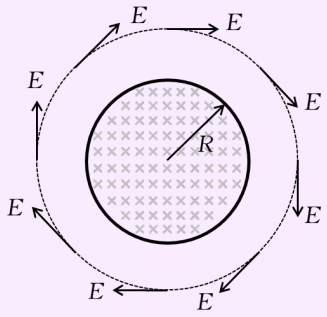
最常见的是圆柱磁场（载流螺线管在内部产生的磁场）

模型

圆柱磁场变化的涡旋电场

设匀强磁场的截面是一个半径为 R 的圆，且磁感应强度大小均匀随时间变化

则其产生的涡旋电场为环形，方向与圆心径线垂直（也就是切向），且在同心圆环路上处处相等



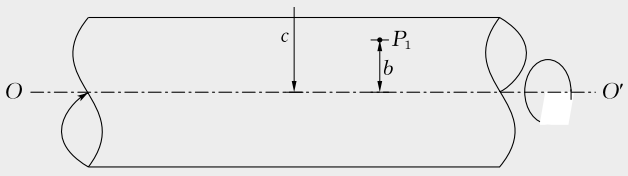
此时涡旋电场的环路积分可以简化为 $E_i\cdot 2\pi r$，因而能够得到

$$\begin{cases} 2\pi r\boldsymbol{E}_i = -\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi r^2, & r<R \\ 2\pi r\boldsymbol{E}_i = -\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\pi R^2, & r>R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{E}_i = -\dfrac{r}{2}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}, & r<R \\ \boldsymbol{E}_i = -\dfrac{R^2}{2r}\dfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}, & r>R \end{cases}$$

例 1

感生电动势：涡旋电场

一半径为 a 的无限长均匀带电圆筒面，单位长度上的电荷为 λ，圆筒绕 oo' 以匀角加速度 β 转动，试求圆筒内与轴相距为 b 的 P_1 点的电场强度



解答

一段圆筒等效为一个环形电流，整个圆筒的环形电流组合成载流螺线圈

单位长度等效电流

$$I=\omega\cdot\frac{\lambda}{2\pi}=\frac{\omega\lambda}{2\pi}$$

由安培环路定理

$$B=\mu_0\frac{\omega\lambda}{2\pi}=\mu_0\frac{\beta\lambda t}{2\pi}$$

是一个与时间有关的值，因此涡旋电场

$$2\pi rE_i=-\pi r^2\frac{\partial B}{\partial t}=-\pi r^2\frac{\mu_0\beta\lambda}{2\pi}\rightarrow\quad E_i=-\frac{\mu_0\beta\lambda}{4\pi}r$$

因此 P_1 点

$$E_i=\frac{\mu_0\beta\lambda}{4\pi}b$$

方向与圆筒旋转方向相反

※ 磁通量法

磁通量法不管是动生还是感生都可以求解，但是它只能求解整个回路的感应电动势

但是我们可以加以利用，即使不是回路也可以使用该方法求解

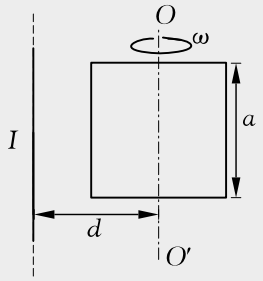
① **补全回路**

将要求电动势的导体与其它**不切割磁感线**的假想导体组成回路，此时回路的电动势就是所求

若要求的就是回路电动势，且回路作转动，则一般来说用磁通量法更加便捷

例 1

在长直导线附近，有一边长为 a 的正方形线圈，绕其中心线 oo' 以角速度 ω 旋转，转轴 oo' 与长直导线间的距离为 d，如导线中通有电流 I，求线圈中的感应电动势。



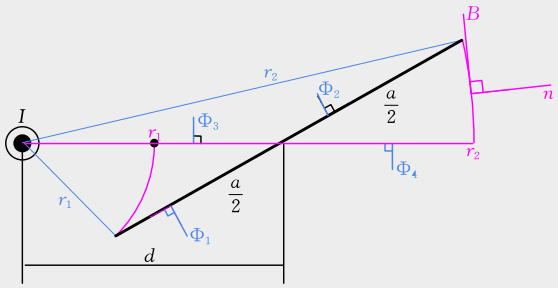
解答

设 $t=0$ 时处于线圈平面位于纸面，则 t 时刻线圈转过的角度 $\theta=\omega t$

俯视图如图所示，由于不同位置 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 夹角不同，直接求磁通量很麻烦

此处巧妙地用一个方法来转换：

构建如图所示的 2 个闭合曲面，根据 12 章的结论，闭合曲面磁通量为 0



平行于水平面的两个底面自然没有磁通量，两个扇形圆柱面的 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 垂直，因此 $\Phi_{\mathrm{m}}=0$

只有如图所示的 4 个面有磁通量，记为 Φ_1 至 Φ_4，因此有

$$\Phi_1+\Phi_3=\Phi_2+\Phi_4=0$$

则我们就要求的斜面磁通量 $\Phi_2-\Phi_1$ 转化为新的平面的磁通量 $\Phi_3-\Phi_4$ 了，将 Φ_4 的 $\boldsymbol{n}$ 反向，变成 $\Phi_3+\Phi_4$，实际上是同一平面，且这个面上 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 同向，求解方便很多！

$$\Phi=\int_{r_1}^{r_2}a\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\mathrm{d}r=a\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

这里的 r_2 和 r_1 都是与 t 有关的变量，由几何关系：

$$r_1=\sqrt{(d-\frac{a}{2}\cos\omega t)^2+(\frac{a}{2}\sin\omega t)^2}\ ,\quad r_2=\sqrt{(d+\frac{a}{2}\cos\omega t)^2+(\frac{a}{2}\sin\omega t)^2}$$

代入后，用 $\varepsilon_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 即可得到感应电动势

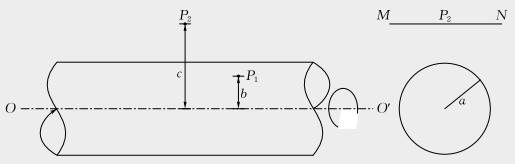
本题当然可以用动生电动势来求（好像会更简便），求的时候需要搞清楚夹角，因此画图很重要

求感生时，位于径向的直导线因为处处垂直于涡旋电场，因此不产生感生电动势

例 2

一半径为 a 的无限长均匀带电圆筒面，单位长度上的电荷为 λ，圆筒绕 oo' 以匀角加速度 β 转动，试求：

（2）若有一长为 l 的金属棒 MN 与圆筒轴线相垂直，P_2 点在金属棒正上方且为 MN 中点，垂直距离 $oP_2=c$，求金属棒 MN 两端的电势差。



解答

连接 OM 和 ON，因为这两段为径向，恒与涡旋电场垂直，因此没有感生电动势

则 MN 上电动势就是回路 OMN 的电动势：

$$\Phi = BS = \theta a^2 \frac{\mu_0 \beta \lambda t}{2\pi} \quad \text{其中} \quad \tan\theta = \frac{l}{2c}$$

因此

$$\varepsilon_{MN} = \frac{\mu_0 a^2 \beta \lambda}{2\pi} \arctan\frac{l}{2c}$$ （本题题干不清，无法辨别具体方向）

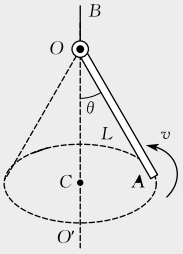
② **转化回路**

将要求电动势的导体与其它假想导体组成回路使得**回路磁通量不变**，此时假想导体电动势为所求

此法可将求复杂形状导体的电动势转化为简单导体（直导线）的电动势

例 3

在磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场中，有一长为 L 的导体棒以匀角速度 ω 绕轴 oo' 轴旋转。oo' 轴与磁场方向平行，棒与磁场方向夹角为 θ ，求导线棒中的动生电动势。



解答

构建如图所示的回路 OAC

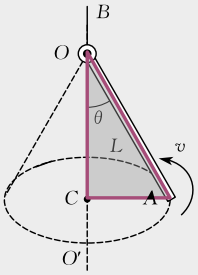
该回路平面与 $\boldsymbol{B}$ 平行，因此磁通量恒为 0，从而整个回路的感应电动势为 0

而 OC 段实际上没有运动，因此其上无动生电动势

由以上两个结论可知 OA 的电动势即为 CA 的电动势

由于 CA 在垂直 $\boldsymbol{B}$ 的平面内绕 C 转动，因此感应电动势

$\varepsilon_{OA} = \varepsilon_{CA} = \frac{1}{2}\omega B(\overline{CA})^2 = \frac{1}{2}\omega B L^2 \sin^2\theta$ ，方向由 $O \to A$



※ 磁场和线圈同时变化

此时，我们可以求任意 t 时刻线圈的感应电动势

① 假定磁场分布恒为 t 时刻的磁场，求出动生电动势

② 假定导体位置固定于 t 时刻的位置，求出感生电动势

③ 两者相加，得到感应电动势

例 6 如图所示，两根平行放置相距 $2a$ 的无限长载流直导线，其中一根通稳恒电流 I_0 ，另一根通交变电流 $s = I_0 \cos\omega t$.两导线间有一与其共面的矩形线圈，线圈的边长分别为 l 和 $2b$ $(b > a)$，l 边与长直导线平行，且线圈以速度 υ 垂直于导线向右运动。当线圈运动到两导线的中心位置（即线圈中心线与距两导线均为 a 的中心线重合）时，右侧导线中的电流恰好为

零，求此时线圈中的

（1）动生电动势；（2）感生电动势；（3）感应电动势.

解 **第（1）问**

将磁场分布固定为所求时刻的分布，则此时右侧导线电流为 0，不产生磁场

线圈中，只有与导线平行的部分 AB 和 CD 才产生电动势，因此

$$\varepsilon_{动}=\varepsilon_{动AB}-\varepsilon_{动DC}=B_1vl-B_2vl=\frac{vl\mu_0I_0}{2\pi(a-b)}-\frac{\mu_0I_0vl}{2\pi(a+b)}=\frac{\mu_0I_0vl}{2\pi}[\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}]$$

方向顺时针

第（2）问

将线圈位置固定为所求时刻的位置，由于左侧导线产生的是稳恒磁场，无感生电动势

因此只考虑右侧导线，则

$$\Phi=-\int_{a-b}^{a+b}\frac{\mu_0 i}{2\pi(2a-r)}l\mathrm{d}r=-\frac{\mu_0 li}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a-b}$$

$$\varepsilon_{感}=\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a-b}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

由于 $i=I_0\cos\omega t$，因此

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\omega I_0\sin\omega t$$

又由于此时 $\cos\omega t=0$，因此 $\sin\omega t=\pm1$，于是

$$\varepsilon_{感}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\pm\frac{\mu_0 l\omega I_0}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a-b},\quad \omega t=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

第（3）问

$$\varepsilon=\varepsilon_{动}+\varepsilon_{感}=\frac{\mu_0I_0vl}{\pi}\frac{b}{a^2-b^2}\pm\frac{\mu_0 l\omega I_0}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a-b}$$，顺时针为正，逆时针为负

※ 圆盘的感应电流

① 将圆盘分割为一个个半径为 r，宽 $\mathrm{d}r$ 的微元圆环

② 求出该圆环的磁通量 → 感应电动势 → 电阻 → 感应电流，然后将所有感应电流叠加（积分）

严选真题	设有一个半径为 a、高度为 b 的铝圆盘，其电阻率为 ρ。把圆盘放置在均匀磁场中，磁场方向垂直盘面。磁场随时间变化，且变化率 $\mathrm{dB/dt}=\mathrm{k}$，其中 k 为一常量。求盘内的感应电流（圆盘内感应电流产生的磁场略去不计）。
解答	取半径为 r，宽 $\mathrm{d}r$ 的圆环，规定顺时针为正方向则该圆环的磁通量 $$\Phi=\int B\cdot\mathrm{d}S=\int_0^r B\cdot2\pi r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^r ktr\mathrm{d}r=k\pi r^2t$$ 由此得到圆环上的感应电动势

$$d\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -k\pi r^2 \quad \text{方向为逆时针}$$

圆环的电阻

$$R = \rho\frac{l}{S} = \rho\frac{2\pi r}{b\,dr}$$

因此感应电流

$$dI = \frac{d\varepsilon_i}{R} = \frac{-k\pi r^2}{2\pi r\rho}b\,dr = -\frac{kb}{2\rho}r\,dr$$

$$I = \int_0^a -\frac{kb}{2\rho}r\,dr = -\frac{kba^2}{4\rho}$$

负号说明方向为逆时针

二　自感和互感

※ 基础知识：自感

概念

由于回路中电流变化而在回路自身中产生的感应电动势称为**自感电动势**

此时通过回路的全磁通 Ψ 与电流 I 成正比，比例系数 L 称为**自感系数**

$$\boxed{\Psi = LI}$$

则自感电动势

$$\boxed{\varepsilon_i = -L\frac{di}{dt}}$$

负号表示 ε_i 与 I 方向相反

方法

求回路的自感系数与自感电动势

① 假设回路中通有电流 I，算出磁场分布，然后算出全磁通 Ψ，求出自感系数

② 若通有随时间变化的电流 i，按照公式计算自感电动势

例 1

两根半径为 a 的平行长直传输线，相距为 d，且 $a << d$，求单位长度传输线的自感。

解答

假设传输线中通电流 I，则离 AB 为 r 处的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$$

由于 $a << d$，因此可忽略导线内部的磁通量：

$$\Phi=\int_a^{d-a} l\left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}\right]\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

单位长度的磁通量

$$\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

因此自感系数

$$L=\frac{\mu_0 I}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

※ **互感**

概念

一个回路中的电流变化而在另一个回路中产生感应电动势（**互感电动势**）

此时全磁通与电流依然成正比，比例系数为**互感系数** M

$$M_{12}=M_{21}=M \quad \Psi_{21}=MI_1 \quad \Psi_{12}=MI_2$$

互感电动势

$$\boxed{\varepsilon_{21}=-M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}}$$

求回路的互感系数与互感电动势

① 假设回路 1 通有电流 I_1，算出磁场分布，然后算出回路 2 全磁通 Ψ_{21}，求出互感系数

② 若通有随时间变化的电流 i，按照公式计算自感电动势

严选真题

如图所示，两个载流螺绕环同心放置，大环匝数为 N_1，半径为 R，小环匝数为 N_2，半径为 r，两个螺绕环相距 L，且 $L\gg r$，则互感系数为_____.

解答

根据第 12 讲，载流线圈圆心轴线上一点（距离 x）处的磁感应强度为

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

假设大环通电流 I，则在小环处（距离 L），产生的磁感应强度为 N_1 个圆线圈的叠加

$$B=\frac{\mu_0 N_1 IR^2}{2(R^2+L^2)^{3/2}}$$

由于 $L\gg r$，可认为小环内的磁感应强度均为 B，因此全磁通

$$\Psi_2=N_2 B\pi r^2$$

因此由互感系数定义

	$$M=\frac{\Psi_2}{I}=\frac{\frac{\mu_0 N_1 I R^2}{2(R^2+L^2)^{3/2}}N_2\pi r^2}{I}=\frac{\mu_0 N_1 N_2 \pi R^2 r^2}{2(R^2+L^2)^{3/2}}$$

例 2	一矩形截面螺绕环（$\mu_r=1$），由细导线均匀密绕而成，内半径为 R_1，外半径为 R_2，高为 b，共 N 匝。在螺绕环的轴线上，另有一无限长直导线 oo'，如图所示，在螺线环内通交变电流 $sI=I_0\cos\omega t$，求无限长直导线中的感应电动势
解答	本题涉及了两个回路，因此是互感问题。由互感电动势的求法，任务在于求出互感系数 M，既可以假设 I_1 求 Ψ_2，也可假设 I_2 求 Ψ_1，由于载流长直导线不好求磁通量，所以我们假设直导线通 I，求螺绕环的磁通量 ① 载流直导线的 $B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$，由于螺绕环内 $\mu_r=1$，因此按真空做 螺绕环的全磁通 $$\Psi=N\Phi=N\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}b\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 NIb}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$ ② 互感系数 $$M=\Psi/I=\frac{\mu_0 Nb}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$ ③ 互感电动势 $$\varepsilon_{21}=-M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 Nb\omega I_0}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}\sin\omega t$$

※ RL 电路

与 RC 电路类似，RL 电路也有类似的效果

严选真题	对于由电阻 R、电感 L、电池、开关串联组成的 RL 电路，当合上开关后，以下关于电流的描述哪个正确？ A.减小　　B.逐渐增加到一个恒定值　　C.逐渐减小到一个恒定值　　D.不变
解答	RL 电路最终是短路的，有电流，因此选 B

三　磁场的能量

※ 自感磁能

自感系数 L 的线圈建立稳定电流 I_0 时，线圈中的磁能为

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}LI_0^2$$

※ 磁能密度

磁场中某点处的磁能密度

$$\boxed{w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}}$$

积分得到 V 内的磁场能量

求磁场能量

① 求出 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的分布

② 表示出磁能密度 w_{m}

③ 在指定的体积范围内对 w_{m} 进行积分，得到磁场能量 W_{m}

例 1

同轴电缆由半径为 R_1 的铜芯线和半径 R_2 的同轴圆筒所组成（如图），其间充满磁导率为 μ 的绝缘介质。电流 $\boldsymbol{I}$ 从芯线的一端流出经外层圆筒返回，且电流在芯线内均匀分布。求“无限长”同轴电缆上长为 l 的一段的磁场能量

解答

根据安培环路定理

$$H=\frac{I}{2\pi r}$$

则

$$B=\frac{\mu I}{2\pi r}$$

因此磁能密度为

$$w_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}BH=\frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$

在该段的磁场能量

$$W_{\mathrm{m}}=\int w_{\mathrm{m}}\mathrm{d}V=2\pi l\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}r\mathrm{d}r=\frac{\mu I^2 l}{4\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$