

第 6 - 1 讲 常数项级数的敛散性

INTRO 无穷级数的基本知识

※ 无穷级数的定义

本章的研究对象，是无穷多个数的和

定义 数列 $\{a_n\}$ 的所有项之和 “ $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ ” 称为**无穷级数**，记为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

※ 无穷级数的收敛与发散

有的级数会越来越越大，直冲无穷，但有的级数加着加着就越趋近于一个定值

定义 若当 $n \rightarrow \infty$ 时，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 收敛（极限存在），则称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

否则，称无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **发散**

显然，级数收敛的前提是数列本身得收敛，并且要收敛至 0

定理 若无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，反之不一定成立

· 无穷级数判断收敛以及求和的最原始的方式，就是求前 n 项和然后求极限，但大家都学过高考数学，知道算前 n 项和有多吓人，因此我们需要别的方式来判断以及求和

定理 若无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ ， $\sum_{n=1}^{\infty} (k_1 a_n + k_2 b_n)$ 收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (k_1 a_n + k_2 b_n) = k_1 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + k_2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

也就是收敛级数的线性组合依然收敛

注：收敛和发散级数的组合一定发散，发散和发散级数的组合可能收敛也可能发散

一 基本级数

※ 等比级数（几何级数）

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \begin{cases} \frac{a}{1-q}, & |q| < 1 \\ \text{发散}, & |q| \geq 1 \end{cases}$$

※ p 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{收敛, } p > 1 \\ \text{发散, } p \leq 1 \end{cases}$$

※ 广义 p 级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} = \begin{cases} \text{收敛, } p > 1 \\ \text{发散, } p \leq 1 \end{cases}$$

※ 交错 p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{绝对收敛, } p > 1 \\ \text{条件收敛, } 0 < p \leq 1 \end{cases}$$

二 正项级数敛散性的判别

※ 比较判别法

定理 对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 若存在 N , 当 $n > N$, 有 $a_n \leq b_n$, 则

$$\textcircled{1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \quad \textcircled{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 发散}$$

该方法适用于判别大小随奇偶有浮动的级数, 以及通项为积分形式的级数

例 1

判别 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+2 \cdot (-1)^n}{2^n}$ 的敛散性

解

由于 $\frac{3+2 \cdot (-1)^n}{2^n} \leq \frac{3+2 \cdot (1)^n}{2^n} = \frac{5}{2^n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2^n}$ 收敛, 因此原级数收敛

※ 极限判别法

定理 对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, 则

① 若 $0 < l < +\infty$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 、 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 具有相同的敛散性

② 若 $l = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

③ 若 $l = +\infty$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散

实际使用极限判别法时, 我们更习惯寻找当 $n \rightarrow \infty$ 时 a_n 的等价无穷小 b_n (通常是基本级数), 通过判断 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的敛散性来判断 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性

例 2

判别 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right)$ 的敛散性

解

由于 $x \rightarrow 0$ 时

$$x - \ln(1+x) \sim \frac{1}{2}x^2$$

因此当 $n \rightarrow \infty$ 时

$$\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$$

因此原级数的敛散性与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 相同, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 因此原级数收敛

※ 比值判别法 / 根值判别法

定理 对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$:

- ① 若 $0 < l < 1$, 级数收敛
- ② 若 $l > 1$, 级数发散
- ③ 若 $l = 1$, 判别法失效

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$:

- ① 若 $0 < l < 1$, 级数收敛
- ② 若 $l > 1$, 级数发散
- ③ 若 $l = 1$, 判别法失效

该方法适合判断含阶乘的无穷级数

该方法适合判断含复杂指数的无穷级数

例 3

判别 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ 的敛散性

解

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{\frac{(n+1)^{n+1}}{\frac{3^n \cdot n!}{n^n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1$$

因此原级数发散

例 4

判别 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ 的敛散性

解

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} e^{\frac{\ln^2 n}{n}} = 0 < 1$, 因此原级数收敛

※ 积分判别法

定理 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒正且单调递减, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 与积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 有相同的敛散性

例 5

判别 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$ 的敛散性

解

由于 $f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$ 在 $[3, +\infty)$ 上非负且单调递减, 且

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} dx = \ln[\ln(\ln x)] \Big|_3^{+\infty} = +\infty$$

因此原级数发散

三 一般级数敛散性的判别

※ 交错级数敛散性判别

定义 若 $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $a_n \geq 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 为交错级数

定理 设有交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, 若

① 数列 $\{a_n\}$ 单调递减

② $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

则交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛, 但收敛的交错级数不一定具有上面的特性

例 6

判别 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ 的敛散性

解

由于

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n [\sqrt{n} + (-1)^n]}{n-1} = \frac{\sqrt{n}}{n-1} (-1)^n + \frac{1}{n-1}$$

记函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$, 则

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) - \sqrt{x}}{(x-1)^2} = -\frac{(x+1)}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0$$

因此可得 $\frac{\sqrt{n}}{n-1}$ 单调递减, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0$, 因此 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1} (-1)^n$ 收敛

由于 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1} (-1)^n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ 发散, 因此 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ 发散

这个例子告诉我们, 将级数拆成收敛级数与发散级数之和是证明其发散的一种有力手段

※ 绝对收敛与条件收敛

定义 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **绝对收敛**;

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **条件收敛**

定理 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 绝对收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必收敛

这告诉我们, 若要证明一个一般项级数收敛, 可以将其作绝对值化为正项级数, 证明该级数绝对收敛, 但如果正项级数是发散的, 也不排除原级数条件收敛的可能

第 6 - 2 讲 幂级数

一 幂级数的收敛半径

※ 幂级数的概念

定义 称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 为关于 $x - x_0$ 的**幂级数**，特别地， $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 为关于 x 的**幂级数**

※ 收敛点与发散点

定义 使幂级数收敛的 x 称为**收敛点**，使幂级数发散的 x 称为**发散点**

所有收敛点组成的集合称为**收敛域**，排除两端点的开区间称为**收敛区间**

※ 收敛半径

定义 称下式为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 R ：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = R \quad \text{或} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

定理 若 $0 < R < +\infty$ ，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$ 内绝对收敛， $|x| > R$ 时发散

当 $R = 0$ 时，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 仅在 $x = 0$ 处收敛， $x \neq 0$ 时发散

若 $R = +\infty$ ，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内绝对收敛

求具体幂级数的收敛域

· 求收敛区间 \rightarrow 确定收敛区间两端点的敛散性 \rightarrow 整合得到收敛域

若幂级数的形式是 x^n ，直接用公式求收敛半径 R ，收敛区间为 $(-R, R)$

否则，用正项级数的比值或根值判别法，根据收敛条件列出不等式，求出 x 的范围

例 1

求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域

解

注意到幂级数为 x^{2n+1} ，因此采用正项级数的比值判别法：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{x^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)} / \frac{x^{2n+1}}{n(2n-1)} = x^2$$

$x^2 < 1$ 时, 幂级数绝对收敛; $x^2 > 1$ 时, 幂级数发散

$x^2 = 1$ 时, 有

$$\left| \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)} \right| = \frac{1}{n(2n-1)} \sim \frac{1}{2n^2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 绝对收敛, 从而 $x = \pm 1$ 都收敛

所以收敛域为 $[-1, 1]$

※ 收敛相关定理

定理 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 \neq 0$ 时收敛, 则对任意 $|x| < |x_0|$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0 \neq 0$ 时发散, 则对任意 $|x| > |x_0|$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散

二 幂级数的和函数

※ 和函数的定义

定义 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 I , 定义如下函数为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

※ 常用幂级数求和: 麦克劳林级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad (-1 < x < 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad (-1 \leq x < 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!} = \ln(1+x)^\alpha$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

注意 以上展开式中的 x 可以用 $g(x)$ 替代

※ 幂级数的分析性质

定理 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛区间为 I ，其和函数 $S(x)$ 在 I 上连续，且满足下列性质：

① 和函数求导等价于幂级数逐项求导

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)'$$

② 和函数积分等价于幂级数逐项积分

$$\int S(x) dx = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n dx$$

求和思路

利用幂级数的分析性质将原幂级数逐层变形可以求和的形式，求和后，对和函数进行反向操作可以采用的操作有：

- **先导后积** 对幂级数逐项求导，适用于系数以分母形式出现的幂级数
- **先积后导** 对幂级数逐项积分，该方法适用于系数以分子形式出现的幂级数
- **拆分** 将系数拆分成简单系数之和，分别求和函数，适用于系数以复杂分式形式出现的幂级数
- **整体** 系数中的指数项可以并入 x ，组成整体 $g(x)$
- **提取 x** 如果由于系数和 x 指数不匹配导致无法求导积分消去系数，可以提出有限个 x 和常数

注：① 需要注意原级数的前几项能否有 x 提出（必要时要将前几项单独处理）

② 提出来的 x 不需要参与求导或积分，处理后面的幂级数即可，但要记得最后并入结果中

③ 如果是要填入 x ，即提出 x^{-p} ，需要单独考虑 $x=0$ 的情况

注意：先求收敛域！最后写和函数也要标明收敛域！

例 2

求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的和函数 $S(x)$

解

求和函数应先求收敛域, 根据例 1, 收敛域为 $[-1, 1]$

注意到系数以分母项的形式存在, 应当通过求导消除, 但 x 的指数不匹配, 需要提取出一个 x :

$$S(x) = 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{2n(2n-1)} = xT(x)$$

则 $T(x)$ 可逐项求导消除系数, 两次求导后化为核心公式形式, 可求和:

$$T'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}, \quad T''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

在求导时注意到 $T(0) = T'(0) = 0$, 因此对 $T''(x)$ 积分两次:

$$T'(x) = T'(0) + \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x$$

$$T(x) = T(0) + \int_0^x \arctan t dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

最终得到

$$S(x) = 2xT(x) = 2x^2 \arctan x - x \ln(1+x^2), \quad x \in [-1, 1]$$

例 3

求幂级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n$ 收敛域及和函数 $S(x)$

解

由于 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_n}{u_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n!} / \frac{(n+2)^2}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{(n+2)^2} = \infty$, 因此收敛域为 $(-\infty, +\infty)$

设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n$, 则

$$\int S(x) dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!} x^{n+1} dx = xT(x)$$

$$\int T(x) dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!} x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} dx = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} dx = xe^x$$

也就是积分并提出 x 两次后代入 e^x 的公式求和, 因此

$$T(x) = (xe^x)' = (x+1)e^x$$

$$S(x) = [xT(x)]' = [(x^2+x)e^x]' = (x^2+3x+1)e^x, \quad -\infty < x < +\infty$$

例 4

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$

解

由比值判别法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4n^2 + 12n + 11}{2n + 3} x^{2n+2} / \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n} \right| = x^2$$

因此 $|x| < 1$ 时幂级数收敛, $|x| > 1$ 时则发散

$x = \pm 1$ 时, 级数为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} \sim \sum_{n=0}^{\infty} 2n$, 因此发散, 综上所述级数收敛域为 $(-1, 1)$

设 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 + 4n + 3}{2n + 1} x^{2n}$, 则

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 + 2}{2n+1} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n}$$

由于

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} \right)' = \left(\frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} x^{2n} &= \frac{2}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{2}{x} \left(\int \frac{1}{1-x^2} dx \right) = \frac{1}{x} \left(\ln \frac{1+x}{1-x} \right) (x \neq 0) \end{aligned}$$

当 $x = 0$ 时, 只有 $n = 0$ 项不为 0:

$$S(0) = \frac{(2 \times 0 + 1)^2 + 2}{2 \times 0 + 1} = 3$$

因此

$$S(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}, & 0 < |x| < 1 \\ 3, & x = 0 \end{cases}$$

($x = 0$ 也可以由和函数的连续性求极限得到, 但显然没有直接代入原式快)

※ 函数展开为幂级数

展开思路

函数展开的策略与求和大致相同, 先通过求导、积分、拆项等运算将函数化为可以展开的类型
再对得到的幂级数逐项积分或求导, 常见策略:

- 见到分式 \rightarrow 拆分成 $\frac{1}{1+\dots}$ 和 $\frac{1}{1-\dots}$ 之和
- 见到三角函数的次方 \rightarrow 用倍角公式化为一次三角函数
- 见到 $\arctan x$ \rightarrow 求导
- 见到对数 $\ln(\dots)$ \rightarrow 化为 $\ln(1+\dots)$

展开时要注意 x 的取值范围, 如果不同的展开式有不同的取值范围, 则最终应取交集

例 5

将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x - 5}$ 展开成关于 $(x-1)$ 的幂级数

解

这是一个分式，因此考虑拆分：

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(x-5)(x+1)} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{(x-1)-4} - \frac{1}{(x-1)+2} \right) \\ \frac{1}{(x-1)-4} &= -\frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{(x-1)}{4}} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{4^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{4^{n+1}} \quad \left(-1 < \frac{x-1}{4} < 1 \Rightarrow -3 < x < 5 \right) \\ \frac{1}{(x-1)+2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{(x-1)}{2} + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^{n+1}} \quad \left(-1 < \frac{x-1}{2} < 1 \Rightarrow -1 < x < 3 \right) \\ f(x) &= \frac{1}{6} \left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{4^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{2^{n+1}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(-1)^{n+1} 2^{n+1} - 1](x-1)^n}{3 \times 2^{2n+3}} \end{aligned}$$

第 6-3 讲 傅里叶级数

一 傅里叶级数

※ 傅里叶级数的基本概念

周期为 $2l$ 的周期函数 $f(x)$ 可以展开为傅里叶级数, 其基本形式为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

※ 傅里叶级数的系数

对于定义在 $[-l, l]$ 上的非周期函数, 可按上式展开为傅里叶级数并求取系数

对于定义在 $[0, l]$ 上的非周期函数, 则要先进行延拓, 也就是补全函数在区间 $[-l, 0)$ 上的定义

为了方便, 通常选择以下两种方式:

· 偶延拓, 使得 $f(x)$ 成为偶函数, 此时傅里叶级数只留下余弦项, 称为余弦级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

· 奇延拓, 使得 $f(x)$ 成为奇函数, 此时傅里叶级数只留下正弦项, 称为正弦级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

例 1

24-25 期末

将函数 $f(x) = 1 - x^2 (0 \leq x \leq \pi)$ 展开为余弦级数, 则系数中的 $a_0 =$ _____, $a_n =$ _____.

解

直接代入余弦级数的公式即可

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - x^2) dx = \frac{2}{\pi} \left(\pi - \frac{1}{3} \pi^3 \right) = 2 - \frac{2}{3} \pi^2$$
$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - x^2) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \int_0^{\pi} (1 - x^2) d \sin nx = (-1)^{n-1} \frac{4}{n^2}$$

注意 求傅里叶级数系数时, 往往要求含幂函数和三角函数的组合积分, 建议记相关的常见结论, 节约计算时间

二 狄利克雷收敛

※ 狄利克雷收敛定理

注意到我们使用的符号是“ \sim ”而不是“ $=$ ”，因为还需要回答傅里叶级数是否收敛的问题：

定理 设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的可积函数，如果在 $[-l, l]$ 上 $f(x)$ 满足：

① 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；

② 在一个周期内至多只有有限个极值点

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，且收敛于左右极限的平均值，即

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$$

题型：求傅里叶级数的和函数某点的值

此类题型中，通常是已知在某区间上定义的 $f(x)$ 的傅里叶级数，求级数的和函数 $S(x)$ 在某点的值

① 若某点不在 $f(x)$ 定义的区间上，就利用周期性和对称性，转换为定义区间上某点的值

② 根据狄利克雷定理，若 $f(x)$ 在 x_0 连续，则 $S(x_0) = f(x_0)$ ，否则就求该点的左右极限并取平均

例 1 (23-24 期末)

已知 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且 $f(x) = \begin{cases} -2, & -\pi < x \leq 0 \\ 3, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ ，则和函数在 $x = 2\pi$ 处的值

$S(2\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解

由于 $f(x)$ 周期为 2π ，因此

$$S(2\pi) = S(0)$$

0 是 $f(x)$ 的间断点，因此 $S(0) = \frac{1}{2}[f(0^-) + f(0^+)] = \frac{1}{2}(-2 + 3) = \frac{1}{2}$ ，本空填 $\frac{1}{2}$

第 7-1 讲 向量代数

一 向量代数

※ 向量的坐标表示

在解析几何中，向量一般表示为

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{或} \quad \mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 可以视为三个方向上的单位向量

※ 向量积

定义 向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 按以下方式确定的向量 \mathbf{c} 称为 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的**向量积**，又称外积、叉积或叉乘

$$\textcircled{1} \quad |\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin\theta, \quad \theta \text{ 为 } \mathbf{a} \text{ 和 } \mathbf{b} \text{ 的夹角}$$

$$\textcircled{2} \quad \mathbf{c} \perp \mathbf{a}, \quad \mathbf{c} \perp \mathbf{b} \text{ 且三者符合右手法则}$$

向量积的引入使得求空间平面的法向量也不再需要像高中那样麻烦，直接叉乘即可

① 向量积的性质

定理 向量积满足如下性质

$$\textcircled{1} \quad \text{反交换律} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

$$\textcircled{2} \quad \text{结合律} \quad k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = k\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times k\mathbf{b}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{分配律} \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

$$\textcircled{4} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \text{ 与 } \mathbf{b} \text{ 共线}$$

② 向量积的坐标运算

若 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (\text{行列式按第一行展开即可})$$

③ 面积计算

若 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, 则两个向量围成的平行四边形面积为 $S = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$

※ 混合积

混合积为 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$, 几何意义是三个向量组成的平行六面体的体积，直接联想到线性代数：

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

第 7-2 讲 空间平面与直线

一 平面方程 ★

平面的两大要素：垂直于该平面的法向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ ，以及某个平面上的点 (x_0, y_0, z_0)

※ 点法式

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

※ 一般式

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

※ 截距式

该形式要求平面不平行于任意一个坐标面， a, b, c 分别为平面与各坐标轴的截距

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

二 直线方程 ★

直线的两大要素：方向向量 $\mathbf{v} = (A, B, C)$ 以及过点 (x_0, y_0, z_0)

※ 点向式

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}$$

※ 一般式

看作两个平面的交线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

其方向向量可通过两条方程的系数求出

$$\mathbf{v} = (A_1, B_1, C_1) \times (A_2, B_2, C_2)$$

※ 参数式

$$x = x_0 + At, \quad y = y_0 + Bt, \quad z = z_0 + Ct$$

※ 两点式

若已知直线过两个点 (x_0, y_0, z_0) 和 (x_1, y_1, z_1) , 则直线方程表示为

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

此时, 方向向量为分母组成的序列

$$\boldsymbol{v} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$$

三 直线与平面位置关系的向量表示与平面束方程 ★★★

※ 位置关系的向量表示 (高中都学过)

① 直线与直线

$$L_1 \perp L_2 \quad \boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0$$

$$L_1 // L_2 \quad \boldsymbol{v}_1 = k\boldsymbol{v}_2$$

$$\text{线线角} \quad \theta = \arccos \frac{|\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1| |\boldsymbol{v}_2|}$$

② 直线与平面

$$L \perp \pi \quad \boldsymbol{\tau} // \boldsymbol{n}$$

$$L // \pi \quad \boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{n}$$

$$\text{线面角} \quad \theta = \arcsin \frac{|\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{\tau}| |\boldsymbol{n}|}$$

③ 平面与平面

$$\pi_1 \perp \pi_2 \quad \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0$$

$$\pi_1 // \pi_2 \quad \boldsymbol{n}_1 = k\boldsymbol{n}_2$$

$$\text{面面角} \quad \theta = \arccos \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1| |\boldsymbol{n}_2|}$$

常考: 求满足条件的平面方程或直线方程

- 求方程的核心就是: 平面/直线经过哪个点, 方向向量/法向量是哪个
- 将题干给的条件转化为向量间的关系, 求出关键向量, 即可成功解题
- 注意: 法向量和方向向量可以任意缩放, 最好缩到最简整数比, 简化后续运算

例 1 (23-24 期中)

求通过直线 $L: \begin{cases} x-y+z-1=0 \\ 2x+y+z-2=0 \end{cases}$ 的两个互相垂直的平面, 其中一个平面与直线

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{1} \text{ 平行.}$$

解

设两个平面为 π_1, π_2 , 法向量分别为 \boldsymbol{n}_1 和 \boldsymbol{n}_2 , 另一直线 L_0 的方向向量 $\boldsymbol{v}_0 = (2, -1, 1)$

直线 L 的方向向量

$$\boldsymbol{v} = (1, -1, 1) \times (2, 1, 1) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 3)$$

平面 π_1 过 L 且平行于直线 L_0 , 因此 $\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{v}_0$ 且 $\boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{v}$, 不妨取

$$\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (4, 8, 0) \rightarrow \boldsymbol{n}_1 = (1, 2, 0)$$

平面 π_2 过 L 且与 π_1 垂直, 因此有 $\mathbf{n}_2 \perp \mathbf{v}$ $\mathbf{n}_2 \perp \mathbf{n}_1$, 不妨取

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (6, -3, 5)$$

代入 $z=0$ 至直线 L , 解得 $x=1$, $y=0$, 因此两个平面均过点 $(1, 0, 0)$, 因此平面方程

$$\pi_1: (x-1) + 2y = 0$$

$$\pi_2: 6(x-1) - 3y + 5z = 0$$

※ 平面束方程

过一条定直线的所有平面组成的集合称为**平面束**

设直线方程为 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$, 则过该直线的平面束可表示为

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

这意味着, 如果平面过已知直线, 就可以用该方法表示待求平面

四 距离公式 ★★★★★

※ 点到直线的距离

若直线 L 过点 P_0 , 方向向量为 \mathbf{v} , 则直线外一点 P 到直线 L 的距离为

$$d = \frac{|\mathbf{v} \times \overline{P_0P_1}|}{|\mathbf{v}|}$$

例 1 (23-24 期末)

点 $(-1, 1, 4)$ 到直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{-1}$ 的距离为_____.

解

取由直线方程可知直线上一点 $(1, 2, 5)$, 直线方向向量 $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$, 则

$$d = \frac{|(2, 1, -1) \times (2, 1, 1)|}{|(2, 1, -1)|} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{h} \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{6}} = \frac{|(2, -4, 0)|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{3}$$

※ 点到平面的距离

平面外一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

例 2 (24-25 期末)

点 $(1, -2, 3)$ 到平面 $2x - y + 2z + 2 = 0$ 的距离为_____.

解

将点代入公式即可

$$d = \frac{|2 \times 1 - 1 \times (-2) + 2 \times 3 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = 4$$

例 2 (23-24 期末)

求过直线 $L: \begin{cases} 7x - y - 2z = 8 \\ x - 9y + 8z = 20 \end{cases}$ 且与球面 $(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \frac{1}{2}$ 相切的平面方程.

解

用平面束方程代表过该直线的平面方程

$$\lambda(7x - y - 2z - 8) + x - 9y + 8z - 20 = 0$$

即

$$(7\lambda + 1)x - (9 + \lambda)y - (2\lambda - 8)z - 8\lambda - 20 = 0$$

可能有同学看到相切就开始求偏导了, 但这个球面, 算起来不方便, 而且关于球面相切, 有更好的办法

根据球面方程, 球心为 $(1, -1, 0)$, 半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 因此球心到平面的距离

$$\frac{(7\lambda + 1) + (9 + \lambda) - 8\lambda - 20}{\sqrt{(7\lambda + 1)^2 + (9 + \lambda)^2 + (2\lambda - 8)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

化简并解得

$$\lambda = \pm 1$$

因此满足条件的平面有

$$\begin{aligned} 4x - 5y + 3z - 14 &= 0 \\ 3x + 4y - 5z + 6 &= 0 \end{aligned}$$

第 7-3 讲 曲面与空间曲线

一 曲面方程的表示 ★★★★★

※ 隐式曲面方程

所有满足一个特定函数 F 的点组成了一个曲面

$$F(x, y, z) = 0$$

则该曲面上一点 (x_0, y_0, z_0) 的法向量 \mathbf{n} 为

$$\mathbf{n} = \nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z)_{(x_0, y_0, z_0)}$$

有了这个点以及法向量，该点处的切平面就能确定

※ 显式曲面方程

若曲面方程中的某个变量可以由另外两个坐标明确表示，则称为显式曲面方程

$$z = f(x, y)$$

则该曲面上一点 (x_0, y_0, z_0) 的法向量 \mathbf{n} 为

$$\mathbf{n} = (f'_x, f'_y, -1)_{(x_0, y_0, z_0)}$$

例 1

24-25 期末

设曲面 $\Sigma: x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ ，若曲面上点 (x, y, z) 处的切平面与 yOz 平面平行，求出满足条件的点的坐标。

解

令

$$F = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz - 8 = 0$$

于是

$$F'_x = 2x + 2y + 2z \quad F'_y = 4y + 2x + 4z \quad F'_z = 6z + 2x + 4y$$

该平面与 yOz 平行，因此切平面法向量

$$\mathbf{n} = (F'_x, F'_y, F'_z) // (1, 0, 0)$$

因此

$$F'_x = 2x + 2y + 2z \neq 0$$

$$F'_y = 4y + 2x + 4z = 0$$

$$F'_z = 6z + 2x + 4y = 0$$

解得

$$z = 0$$

$$x = -2y$$

代入曲面方程

$$4y^2 + 2y^2 - 4y^2 - 8 = 0 \Rightarrow y = \pm 2 \quad x = \mp 4$$

于是满足条件的点为

$$(4, -2, 0) \quad \text{或} \quad (-4, 2, 0)$$

二 曲线方程的表示 ★★★★★

※ 参数式曲线方程

参数式将曲线的三个坐标用一个共同的变量 t 表示，每个点对应一个特定的 t

$$\boxed{x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)}$$

则该曲线上一点 (x_0, y_0, z_0) (对应 t_0) 的切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 为

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))}$$

有了这个点以及切向量，该点处的法平面就能确定

※ 一般式曲线方程

曲线方程的一般式是两个曲面方程联立，代表两个曲面的交线

$$\boxed{\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}}$$

则该曲线上一点 (x_0, y_0, z_0) 的切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 为

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \nabla F \times \nabla G}$$

例 1

24-25 期末

曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ 在点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 处的切线方程为_____.

解

令

$$F = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$G = x^2 + z^2 - 1 = 0$$

于是

$$F'_x = 2x \quad F'_y = 2y \quad F'_z = 0 \quad G'_x = 2x \quad G'_y = 0 \quad G'_z = 2z$$

因此

$$\boldsymbol{\tau} = \nabla F \times \nabla G = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{vmatrix} = (4xz, -4xz, -4xy)$$

代入 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$:

$$\boldsymbol{\tau} = (1, -1, -1)$$

因此切线方程

$$\frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{y - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-1} = \frac{z - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}$$

三 求旋转曲面和投影曲线

※ 求旋转曲面

常考：求曲线 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 绕直线 L 旋转一周形成的旋转曲面方程

① 取 L 上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ，并得到方向向量 $\boldsymbol{\tau}$

② 在 Γ 上取一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ，有

$$\Gamma: \begin{cases} F(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ G(x_1, y_1, z_1) = 0 \end{cases}$$

③ 点 M_1 绕 L 旋转一周形成的圆上任意一点 $P(x, y, z)$ 满足

$$\overline{M_1P} \perp \boldsymbol{\tau} \quad \text{且} \quad |\overline{M_0P}| = |\overline{M_0M_1}|$$

④ 联立以上方程消去 (x_1, y_1, z_1) ，即可得到旋转曲面方程

例 1 (23-24 期中)

求直线 $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{3}$ 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面方程。

解

直线 L 为 z 轴, 因此设 M_0 为坐标原点 O , 方向向量 $\tau = (0, 0, 1)$

设直线 Γ 上一点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 满足

$$\frac{x_1}{1} = \frac{y_1}{-2} = \frac{z_1 - 1}{3} \quad ①$$

因此有

$$\overline{M_1O} \cdot \tau = (z - z_1) = 0 \rightarrow z = z_1 \quad ②$$

$$|\overline{OP}| = |\overline{OM_1}| \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \quad ③$$

联立①~③, 消去 x_1, y_1, z_1 , 得到旋转曲面方程为

$$x^2 + y^2 = \frac{5}{9}(z-1)^2$$

※ 求投影曲线

常考: 求曲线 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 投影至平面 π 的曲线方程

① 获得 π 的法向量 \mathbf{n}

② 在 Γ 上取一点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 有

$$\Gamma: \begin{cases} F(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ G(x_1, y_1, z_1) = 0 \end{cases}$$

③ 点 M_1 投影至平面 π 得到的点 $M(x, y, z)$ 满足

M 在平面 π 上

$$M_1M \perp \pi \rightarrow \overline{M_1M} // \mathbf{n}$$

④ 联立方程消去 (x_1, y_1, z_1) , 即可得到曲线方程

例 2 (22-23 期末)

求空间曲线 $C: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1 \end{cases}$ 在平面 $x - 2y + 2z = 10$ 上的投影曲线方程.

解

该平面的法向量 $\mathbf{n} = (1, -2, 2)$

设曲线 C 上一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 满足

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 = 0 \\ x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 1 \end{cases} \quad ① \quad ②$$

P_0 投影到平面的点 $P(x, y, z)$, 满足

$$x - 2y + 2z = 10$$

$$\overline{PP_0} // \mathbf{n} \rightarrow \frac{x-x_0}{1} = \frac{y-y_0}{-2} = \frac{z-z_0}{2} \quad (3)$$

联立①~③，消去 x_0, y_0, z_0 ，解得：

$$20x^2 + 31y^2 + 12z^2 + 48xy + 28xz + 38yz = 1$$

第 8-1 讲 多元函数微分学基本概念

一 多元函数的基本概念

※ 多元函数

定义 设多元空间内的区域 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ，若存在对应法则 f ，对任意点 $P \in D$ 均有唯一的实数 z 与其对应，则称 f 为定义在 D 上的 n 元函数，记作 $z = f(P)$

在多元函数中，定义域由一维的实数区间扩展到了更高维度的二维平面、三维空间……

※ 邻域

定义 在 \mathbb{R}^2 和 \mathbb{R}^3 中，取 $\delta > 0$ ，定义点 $P_0(x_0, y_0)$ 或 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的邻域为

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$$

$$U(P_0, \delta) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta\}$$

与上册定义的邻域相比，这里的邻域由一维的线扩展至二维的圆/三维的球

二 二重极限与连续

※ 二重极限

定义 设函数 $z = f(P)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的去心邻域 $\dot{U}(P_0, \delta_0)$ 内有定义，若存在常数 A ，对 $\forall \epsilon > 0$ ，

$\exists 0 < \delta < \delta_0$ ，当 $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ 时，有

$$|f(x, y) - A| < \epsilon$$

则称 A 为函数 $f(x, y)$ 当点 (x, y) 趋向于点 (x_0, y_0) 时的二重极限，记作 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$

由此可知，二重极限的定义与一元函数极限的定义的结构是相同的，仅在维度上进行了扩展

① 计算二重极限

除了洛必达法则和单调有界定理不再适用外，其余在微积分 I 学过的定理均可使用

如果通过变量代换化为一元极限，那什么法则都能用了

例 1

$$\text{求 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{xy}$$

解

$$\text{原式} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{xy \ln(x^2 + y^2)} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln(x^2 + y^2)}$$

当 $xy > 0$ 时, $x^2 + y^2 \geq 2xy > xy$, 由此

$$xy \ln xy < xy \ln(x^2 + y^2) < (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$$

且 $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ 时, 有 $x^2 + y^2 \rightarrow 0^+$, $xy \rightarrow 0^+$

由于

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln xy = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) = \lim_{u \rightarrow 0^+} u \ln u = 0$$

由夹逼定理, $xy > 0$ 时

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln(x^2 + y^2) = 0$$

当 $xy < 0$ 时, 有

$$-xy < x^2 + y^2$$

因此

$$-xy \ln(-xy) < -xy \ln(x^2 + y^2) < (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$$

同理, 此时

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln(x^2 + y^2) = 0$$

综上所述

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy \ln(x^2 + y^2) = 0, \text{ 原式} = e^0 = 1$$

② 判断二重极限是否存在

二重极限比一元极限有更高的要求, 它要求从 P 沿着任意路径到 P_0 , 函数都能收敛到同一个值

只要某一路径的极限不存在, 或有两个路径的极限存在但不相等, 二重极限都不存在

选取路径就是令 $y = h(x)$, 使得 $x \rightarrow x_0$ 时, $y = h(x) \rightarrow y_0$, 代入二重极限中化为一元极限

计算得到的结果就是该路径下的极限

例 2

判断 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y}$ 的二重极限是否存在

解

选择路径 $y = x$: 原极限化为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^3}{x^2 + x} = 0$$

选择路径 $y = x^3 - x^2$: 原极限化为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + (x^3 - x^2)^3}{x^2 + x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + (x^3 - x^2)^3}{x^3} = 1$$

两条路径的极限存在但不相等, 因此二重极限不存在

※ 连续

定义 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 则称 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处**连续**

三 偏导数与全微分

※ 偏导数

① 一阶偏导数

定义 设函数 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义, 如果极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称 $f(x, y)$ 在 P_0 处对 x 可偏导, 该极限称为对 x 的**偏导数**, 记为 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0, y_0}$ 或 $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{x_0, y_0}$ $f'_x(x_0, y_0)$

同理, $f(x, y)$ 对 y 的**偏导数**记为 $\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{x_0, y_0}$ 或 $\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{x_0, y_0}$ $f'_y(x_0, y_0)$, 定义如下:

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

简单来讲, 偏导数就是将其它自变量视为常数变成特定自变量的一元函数的导数

② 偏导函数

定义 若函数 $f(x, y)$ 在 D 内每一点都存在偏导数, 则称函数在 D 上可偏导

且 D 上的点和其导数之间的新的对应关系称为函数在 D 内的**偏导函数**, 简称偏导数, 记为

$$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial x} \quad f'_x(x, y) \quad (\text{以 } x \text{ 为例})$$

※ 全微分

定义 设函数 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某邻域内有定义, 若存在常数 A, B , 对充分小的 Δx 和 Δy 均有

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < 0$$

则称函数 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处**可微**, 称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为 $z = f(x, y)$ 在 P_0 处的**全微分**, 记作

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

① 全微分与偏导数的关系

· 可微 \rightarrow 可偏导, 且在该点

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

例 3

设 $z = \arctan \frac{x+y}{1-xy}$, 求 $dz|_{(1,2)}$.

解

求两个偏导数

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,2)} = \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{x}{1-2x} \right)_{x=1} = \frac{1}{2}$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,2)} = \frac{d}{dx} \left(\arctan \frac{1+y}{1-y} \right)_{y=2} = \frac{1}{5}$$

因此

$$dz|_{(1,2)} = \frac{1}{2} dx + \frac{1}{5} dy$$

② 可微的充要条件

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y) - f'_x(x, y)\Delta x - f'_y(x, y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

例 4

判断 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处是否可微

解

虽然偏导数连续可以推出可微, 但计算可知这里偏导数不连续, 因此需要用充要条件

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2) \sin \frac{1}{x^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = 0, \text{ 同理, } f'_y(0, 0) = 0$$

因此

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - f'_x(0, 0)\Delta x - f'_y(0, 0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \xrightarrow{\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \sin \frac{1}{\rho^2}}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{\rho} \sin \frac{1}{\rho^2} = 0$$

可微

连续、可微、可偏导间的联系

- 连续 \rightarrow 极限存在
- 可微 \rightarrow 连续 且 偏导数存在
- 偏导数连续（注意偏导函数依然是多元函数，此处是多重连续） \rightarrow 可微

第 8-2 讲 偏导数的计算

一 显式函数的偏导数

※ 一阶偏导数

求偏导数的基本方法

- 将其它变量视为常数，也就是视为指定变量的一元函数，然后对特定变量求导
- 若只需求某点的偏导数，可先将其它变量代入，化简为一元函数，然后求导
- 偏导数实质上就是一元导数，可以使用上册中学习过的所有性质与技巧

例 1

设 $z = (1 + xy^2)^x$ ($x \geq 0$)，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{x \ln(1+xy^2)} \right) = e^{x \ln(1+xy^2)} \left[\ln(1+xy^2) + \frac{xy^2}{1+xy^2} \right] = (1+xy^2)^x \left[\ln(1+xy^2) + \frac{xy^2}{1+xy^2} \right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(1+xy^2)^{x-1} \cdot 2xy = 2x^2y(1+xy^2)^{x-1}$$

※ 高阶偏导数

对一阶偏导函数的进一步偏导称为二阶偏导数，根据对哪自变量偏导以及顺序，有以下四种

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) & f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{array}$$

定理 设函数 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 处有二阶连续偏导数，则

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

此时若全微分 $dz = Pdx + Qdy$ ，则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

二 复合函数的偏导数 ★★★

※ 复合函数的偏导数

定理 设函数 $u = g(x, y)$ 和 $v = h(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处偏导数存在，函数 $z = f(u, v)$ 在对应点处有一阶

连续偏导数，则 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 均存在，则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}$$

简单来讲，就是复合函数求导遵循链式法则

求复合函数的偏导数

- 求复合函数偏导的难度并不大，但容易搞不清楚自变量、中间变量、因变量之间的关系导致列式子漏掉或者多余。建议求导前画一个路线图
(路线图中从因变量到自变量，串联的路径偏导数相乘，并联的路径导数乘积相加)
- 求二阶导的方式：对所求的一阶导继续求偏导，遇到高层次的偏导时注意依然要遵循链式法则
(因变量对中间变量求导后，导函数依然是中间变量的函数)

例 1

设 z 是 x 和 y 的函数，且有二阶连续偏导数，若 $x = e^u \cos \theta$ ， $y = e^u \sin \theta$ 。求证：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = e^{2u} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

解

此类证明题的本质就是计算，用复合函数求导法则求出偏导后相加即可

首先求中间变量对自变量的一阶偏导

$$\frac{\partial x}{\partial u} = e^u \cos \theta \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -e^u \sin \theta \quad \frac{\partial y}{\partial u} = e^u \sin \theta \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = e^u \cos \theta$$

因此因变量对自变量的一阶偏导

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = e^u \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \right)$$

二阶偏导

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right) = e^u \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \right) + e^u \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \theta \right)$$

其中

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} e^u \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} e^u \sin \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} e^u \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} e^u \sin \theta$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = e^u \left(\cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} \right) + e^{2u} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin^2 \theta \right)$$

对另一个变量同样如此

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = e^u \left(\cos \theta \frac{\partial z}{\partial y} - \sin \theta \frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right) = e^u \left(-\sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial y} - \cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial x}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} e^u \sin \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} e^u \cos \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial x}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} e^u \sin \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} e^u \cos \theta$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = -e^u \left(\cos \theta \frac{\partial z}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial z}{\partial y} \right) + e^{2u} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \sin^2 \theta \right)$$

两部分相加, 最终得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = e^{2u} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

※ 一阶全微分形式不变性

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

例 2

已知 $f(u, v)$ 存在二阶连续偏导, 且 $df|_{(1,1)} = 3du + 4dv$, 若 $y = f(\cos x, 1 + x^2)$, 计算 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$ 的值.

解

求导路线图如下:

$$\begin{array}{l} x \rightarrow u \rightarrow y \\ \rightarrow v \rightarrow \end{array}$$

因此

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{dv}{dx} = -\sin x f'_1 + 2x f'_2$$

对于 $f'_1(u, v)$, 其对 x 再次求导为 $-\sin x f''_{11} + 2x f''_{12}$, f'_2 同理

因此再次求导:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\cos x f_1' - \sin x (-\sin x f_{11}'' + 2x f_{12}'') + 2f_2' + 2x(-\sin x f_{21}'' + 2x f_{22}'')$$

代入 $x=0$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -f_1'(x=0) + 2f_2'(x=0)$$

由于 $x=0$ 时, $\cos x = 1, 1+x^2 = 1$:

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = -f_1'(1,1) + 2f_2'(1,1)$$

由全微分 $df|_{(1,1)} = 3du + 4dv$, 得

$$f_1'(1,1) = 3, f_2'(1,1) = 4$$

因此

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=0} = -3 + 2 \times 4 = 5$$

三 隐函数的偏导数 ★★

※ 一元隐函数的导数

方程 $F(x, y) = 0$ 可确定隐含的一元函数 $y = f(x)$, 函数的导数

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

※ 二元隐函数的偏导数

方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定的隐函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

例 1

已知 $z = z(x, y)$ 由方程 $F(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}) = 0$ 所确定, F 具有连续偏导数, 证明: $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy$

证明

先对隐函数求偏导:

$$F'_x = F'_1 - \frac{z}{x^2} F'_2 \quad F'_y = -\frac{z}{y^2} F'_1 + F'_2 \quad F'_z = \frac{1}{y} F'_1 + \frac{1}{x} F'_2$$

因此, 由隐函数定理

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{F'_1 - \frac{z}{x^2} F'_2}{\frac{1}{y} F'_1 + \frac{1}{x} F'_2} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-\frac{z}{y^2} F'_1 + F'_2}{\frac{1}{y} F'_1 + \frac{1}{x} F'_2}$$

于是

$$\begin{aligned} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= -x \frac{F'_1 - \frac{z}{x^2} F'_2}{\frac{1}{y} F'_1 + \frac{1}{x} F'_2} - y \frac{-\frac{z}{y^2} F'_1 + F'_2}{\frac{1}{y} F'_1 + \frac{1}{x} F'_2} = \frac{-x F'_1 + \frac{z}{x} F'_2}{\frac{1}{y} F'_1 + \frac{1}{x} F'_2} + \frac{\frac{z}{y} F'_1 - y F'_2}{\frac{1}{y} F'_1 + \frac{1}{x} F'_2} \\ &= \frac{z \left(\frac{1}{x} F'_2 + \frac{1}{y} F'_1 \right) - xy \left(\frac{1}{y} F'_1 + \frac{1}{x} F'_2 \right)}{\frac{1}{y} F'_1 + \frac{1}{x} F'_2} = z - xy \end{aligned}$$

四 方向导数与梯度 ★★★★★

※ 方向导数

定义 设 $f(x, y, z)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某邻域内有定义, \boldsymbol{l} 为一方向单位向量, 以 M_0 为起点沿 \boldsymbol{l} 方向任取一点 $M(x, y, z)$, 且 $M \in U(M_0)$, 并记 $\rho = |M_0 M|$, 如果以下极限存在:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho}$$

则称该极限为函数 f 在点 M_0 处沿方向 \boldsymbol{l} 的**方向导数**, 记为 $\left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} \right|_{M_0}$ 或 $f'_l(x_0, y_0, z_0)$

偏导数可以看成是方向导数的特例, 方向导数拓宽了偏导的方向选择, 两者之间也存在联系

定理 若函数 f 在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处可微, 则 f 在该处沿任何方向 \boldsymbol{l} 的导数均存在, 且

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \boldsymbol{l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$$

三个 \cos 称为 \boldsymbol{l} 的方向余弦

※ 梯度

定义 设 $f(x, y, z)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处存在对所有变量的偏导数, 称向量

$$\nabla f = \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

为函数 f 在点 M_0 处的**梯度**

这里的符号 ∇ 是梯度算子 $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, 算子与后面跟着的函数作用, 对函数进行求导、积分等操作

由此, 方向导数可以写成

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = \nabla f \cdot \mathbf{l}$$

\mathbf{l} 与梯度同方向时, 方向导数达到最大值, 因此梯度代表的方向是当前函数值增大最快的方向

例 1

24-25 期末

已知函数 $f(x, y, z) = 2xy - z^2$ 及点 $A(2, -1, 1)$, $B(3, 1, -1)$, 则函数 $f(x, y, z)$ 在点 A 处沿由 A 到 B 方向 \vec{n} 的方向导数 $\left. \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \right|_A =$ _____.

解

首先求出方向 \vec{n} , 由于

$$\overline{AB} = (3, 1, -1) - (2, -1, 1) = (1, 2, -2)$$

$$\vec{n} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{(1, 2, -2)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{3}(1, 2, -2)$$

再求梯度

$$f'_x(x, y, z) = 2y, \quad f'_y(x, y, z) = 2x, \quad f'_z(x, y, z) = -2z$$

代入点 A 坐标得到

$$\text{grad } f = (-2, 4, -2)$$

因此

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \right|_A = \text{grad } f \cdot \vec{n} = (-2, 4, -2) \cdot \frac{1}{3}(1, 2, -2) = \frac{10}{3}$$

第 8-3 讲 多元函数极值

一 二元函数的极值 ★★★★★

※ 二元函数极值的定义

定义 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义, 若 $\forall (x, y) \in U(P_0)$, 均有

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

则称 $f(x_0, y_0)$ 为函数 $z = f(x, y)$ 的**极大(小)值**, 称 (x_0, y_0) 为函数的**极大(小)值点**

※ 无条件极值

定理 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内可偏导, 若 (x_0, y_0) 是函数的极值点, 则有

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$$

满足 $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ 的点称为**驻点**, 驻点不一定是极值点, 还需要经过下一重考验:

定理 设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有二阶偏导数, 且为驻点, 记

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0) \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0) \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

若 $B^2 - AC < 0$, 则 (x_0, y_0) 为极值点, 且 $A > 0$ 时取极小值, $A < 0$ 时取极大值

若 $B^2 - AC > 0$, 则 (x_0, y_0) 并非极值点

若 $B^2 - AC = 0$, 则 (x_0, y_0) 可能是极值点, 也可能不是

例 1

24-25 期末

求函数 $f(x, y) = 2 \ln |x + 1| + \frac{x^2 + y^2}{2(x + 1)^2}$ 的极值.

解

首先求偏导

$$f'_x = \frac{2(x+1)^2 + x - y^2}{(x+1)^3} = 0 \quad f'_y = \frac{y}{(x+1)^2} = 0$$

因此

$$x = -2, \quad y = 0 \quad \text{或} \quad x = -\frac{1}{2}, \quad y = 0$$

再求二阶偏导

$$f''_{xx} = \frac{-2x^2 - 6x - 1 + 3y^2}{(x+1)^4} \quad f''_{xy} = -\frac{2y}{(x+1)^3} \quad f''_{yy} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

对 $x = -\frac{1}{2}$

$$A = 24, B = 0, C = 4, \quad B^2 - AC = -96 < 0, \quad \text{且 } A > 0, \quad \text{因此取极小值 } \frac{1}{2} - 2\ln 2$$

对 $x = -2$

$$A = 3, B = 0, C = 1, \quad B^2 - AC = -3 < 0, \quad \text{取极小值 } 2$$

※ 条件极值

当 (x, y) 不再自由取值，而是要满足约束 $g_n(x, y) = 0$ 时， $f(x, y)$ 的极值需要通过拉格朗日乘数法求取令新的函数

$$F(x, y, \lambda_i) = f(x, y) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g(x, y)$$

该函数的无条件极值就是原目标函数的条件极值，且如果问题有实际背景，可以直接判断最值

注意：① 微积分 II 中出现的**不等式证明题**，一般都是通过拉格朗日求极值来做

② 如果要求的是**最值**，一定要把端点处的值也求一下进行比较

例 1

24-25 期末

若 $n \geq 1, a > 0, x \geq 0, y \geq 0$.

(1) 求函数 $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$ 在条件 $x + y = a$ 下的最小值

(2) 证明不等式 $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^n$

解

(1) 使用拉格朗日乘数法，设

$$L(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}(x^n + y^n) - \lambda(x + y - a)$$

则

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{n}{2}x^{n-1} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{n}{2}y^{n-1} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - a = 0 \end{cases}$$

解得

$$x = y = \frac{a}{2}$$

因此 $f(x, y)$ 在此处取到极值, 此时

$$f\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{2}\right)^n + \left(\frac{a}{2}\right)^n\right] = \left(\frac{a}{2}\right)^n$$

又由于两边端点

$$f(a, 0) = f(0, a) = \frac{a^n}{2} > \frac{a^n}{2^n}$$

因此, $f(x, y)$ 在 $x + y = a$ 条件下的最小值为 $\left(\frac{a}{2}\right)^n$

(2) 当 $x = y = 0$ 时, 不等式显然成立

当 $x + y > 0$ 时, 不妨设 $x + y = a > 0$

由 (1) 的结论, 此时

$$f(x, y) \geq \left(\frac{a}{2}\right)^n = \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

该结论对任意 $a > 0$ 都成立, 因此不等式得证

第 9-1 讲 二重积分

积分是一种特殊的“加和”

- 在一元定积分中，我们实际上就是将一条线段上的所有点对应的函数值进行了“加和”
- 拓展到多元积分，我们则是要对一个平面区域、空间区域内的所有点进行“加和”

一 二重积分的定义和性质

※ 二重积分的定义

定义 设 $f(x, y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数，将 D 分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_1, \dots, \Delta\sigma_n$ ，其面积为 $\Delta\sigma_i$ ，记 λ 为各小闭区域直径中的最大值。如果存在 $I \in \mathbb{R}$ ，对于任意 $\varepsilon > 0$ ，总存在 $\delta > 0$ ，使得对于任意满足 $\lambda \leq \delta$ 的分割和任意选取的点 (ξ_i, η_i) 都成立

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i - I \right| \leq \varepsilon$$

则称 f 在 D 上可积， I 为 f 在 D 上的二重积分，记作

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \quad \text{或} \quad \iint_D f(x, y) dx dy$$

※ 二重积分的性质

① 被积函数可拆

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy$$

② 积分区域可拆 ($D = D_1 + D_2$ ，两个子区域没有重叠)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

③ 不等式

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy$$

④ 积分中值定理

若 f 在 D 上连续，则存在 $(\xi, \eta) \in D$ ，使得 $\iint_D f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \cdot S_D$ (S_D 为区域 D 的面积)

二 二重积分的基本计算方法

二重积分计算的底层逻辑

- 二重积分可以视为对平面区域 D 的所有点的函数值进行加和
平面区域由无数连续分布的直线段组成，我们先将区域 D 分解为连续分布的直线段，对每一条线段进行积分，然后将它们的积分值相加（这些线段的积分值会与某条线段的点一一对应，又是一次积分），即可得到二重积分的值
- 可以理解为第一次积分将平面区域 D 压缩为一条线段（被积函数被累积到了压缩出来的线段上），第二次积分就是定积分，将线段上的点相加成一个数

※ 直角坐标系的累次积分

视其中一个变量为常数，对另一个变量进行定积分，积分区间由积分区域决定

积分区间的确定：如果视 x 为常数，作竖直线；如果视 y 为常数，作水平线

这条线与积分区域的交集为一条线段，线段的两个端点的坐标即为积分上下限

（通常是视为常数的变量的函数，如记为 $\varphi_1(x)$ ）

图

这一步相当于将线段上的所有点的函数值 $f(x, y)dxdy$ 进行加和，累积到一维数轴的对应点上

或者更直观地，平面区域被压扁成了线段

图

- 第一次积分后二重积分变成只含一个变量的定积分，其值就是二重积分的值

这一步相当于将累积到数轴上的点的函数值进行加和

- 两个步骤用积分式表示为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx \quad \text{或} \quad \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

称为累次积分，为了简洁并体现顺序，一般写成

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy} \quad \text{或} \quad \boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx}$$

三 二重积分的换元方法 ★★★★★

※ 一般换元法

有时候按直角坐标系积分不好算，或区域太复杂，可以考虑换元，包括如下三个步骤：

- ① 将被积函数中的原变量进行替换：

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

- ② 求出雅可比行列式（如下），然后将 $dxdy$ 替换为 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

③ 画出转换后的区域（用 u 和 v 表示），则积分化为

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_D g(u,v) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du dv$$

例 2

求二重积分 $\iint_D (x+y) dx dy$ ，其中 D 为直线 $x+y=1$ ， $x+y=2$ ， $y=x$ 和 $y=2x$ 围成的区域

解

积分区域如下图，若按直角坐标积分，需要将区间分成三部分，显然太繁琐。

注意到 D 的边界有两条是 $x+y=?$ ，另外两条是 $y=?x$ ，具有相同的结构

不妨根据这个特点来换元，让积分区域变得简单，令

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{1+v} \\ y = \frac{uv}{1+v} \end{cases}$$

则积分区域变成了 $1 \leq u \leq 2$ ， $1 \leq v \leq 2$

雅可比行列式

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^2}$$

因此积分变为

$$\iint_D u \frac{u}{(1+v)^2} du dv = \int_1^2 u^2 du \int_1^2 \frac{1}{(1+v)^2} dv = \frac{2^3-1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{18}$$

※ 极坐标换元法

当积分区域出现曲线（圆弧），或者被积函数出现类似 $x^2 + y^2$ 的结构时，直角坐标系积分会变得困难，可以将直角坐标换元为极坐标：

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad dx dy \rightarrow r dr d\theta$$

当然要注意积分区域的表示

一般积分区域的圆要求圆心或者圆上一点为原点，这样积分才好算

例 4 23-24 期末

已知平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2y\}$ ，计算二重积分 $I_1 = \iint_D (x + y + 1)^2 dx dy$ 。

解

画出 D ，发现其关于 y 轴对称，因此

$$\iint_D x(y+1) dx dy = 0$$

即

$$I_1 = \iint_D (x + y + 1)^2 dx dy = \iint_D (x^2 + (y + 1)^2) dx dy$$

先换元

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v + 1 \end{aligned} \rightarrow u^2 + v^2 \leq 1$$

则

$$I_1 = \iint_D (x + y + 1)^2 dx dy = \iint_D (u + v + 2)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} du dv$$

对称性

$$I_1 = \iint_D (u^2 + v^2 + 4) du dv$$

再按极坐标处理

$$I_1 = 2\pi \int_0^1 (r^2 + 4)r dr = 2\pi \cdot \left(\frac{1}{4} + 2\right) = \frac{9\pi}{2}$$

四 二重积分的计算技巧 ★★★★★

※ 交换积分次序

如果题目要求计算累次积分，那么按它给的顺序去做基本是做不出来的，必须要画出积分区域，交换积分次序

※ 普通对称性

如果积分区域和被积函数都关于某条直线对称，则积分会体现出普通对称性

简单讲就是被积函数偶对称的，积分等于两倍单个区间

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma$$

奇对称的，积分直接为 0

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$$

积分区域 D 的对称轴	被积函数偶对称	被积函数奇对称
y 轴	$f(x, y) = f(-x, y)$	$f(x, y) = -f(-x, y)$
x 轴	$f(x, y) = f(x, -y)$	$f(x, y) = -f(x, -y)$
$y = x$	$f(x, y) = f(y, x)$	$f(x, y) = -f(y, x)$
$y = -x$ (原点)	$f(x, y) = f(-x, -y)$	$f(x, y) = -f(-x, -y)$

※ 轮换对称性

若积分区域关于 $y = x$ 对称，也就是将 x 和 y 互换后积分区域 D 保持不变，则

$$I = \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma$$

此时可以利用线性组合的特性将两种积分任意组合

$$I = \frac{1}{k_1 + k_2} (k_1 \iint_D f(x, y) d\sigma + k_2 \iint_D f(y, x) d\sigma) = \frac{1}{k_1 + k_2} \iint_D [k_1 f(x, y) + k_2 f(y, x)] d\sigma$$

通过这种方法让 $k_1 f(x, y) + k_2 f(y, x)$ 变成更简单的被积函数，就可以大幅简化计算，甚至让本来无法计算的积分变得可以计算

注意 若被积函数或积分区域只有一部分满足对称性，这时要拆分积分，处理有对称性的积分题目经常会将无对称性但好算的被积函数和难算到爆但可用对称性消除的被积函数加到一起千万不要被带进坑里了！

例 1

求积分 $\iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y) dx dy$ ，其中 D 是由圆 $x^2 + y^2 = 4$ 内部和圆 $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ 外部所围成的平面区域。

解

首先观察对称性，注意到整个区域关于 x 轴对称，因此

$$\iint_D y dx dy = 0$$

于是所求变成

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

积分区域为大圆挖去一个小圆，因此先求两个积分，再相减，改用极坐标

$$I_1 = \iint_{D_1} r^2 dr d\theta = 2\pi \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\pi$$

$$I_2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr = \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta = \frac{16}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{32}{9}$$

因此

$$I = I_1 - I_2 = \frac{16}{9}(3\pi - 2)$$

例 2 (22-23 期末)

计算累次积分 $\int_{-1}^1 dx \int_{x^3}^1 \frac{x}{1+x^2} (1 + ye^{-(x^2+y^4)}) dy$.

解

积分区域如下图:

注意到被积函数存在极其复杂的部分, 应先拆开来, 分别处理

$$I = I_1 + I_2 = \int_{-1}^1 dx \int_{x^3}^1 \frac{x}{1+x^2} dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^3}^1 \frac{xy}{1+x^2} e^{-(x^2+y^4)} dy$$

其中

$$I_1 = \int_{-1}^1 dx \int_{x^3}^1 \frac{x}{1+x^2} dy = \int_{-1}^1 \frac{x(1-x^3)}{1+x^2} dx = \dots = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} \quad (\text{定积分的知识})$$

而 I_2 如果硬算将特别恐怖, 最好用对称性简化一部分

虽然积分区域 D 并不满足对称性, 但观察可以发现 D 中的 D_1 和 D 外的 D_2 关于原点对称

且被积函数也关于原点对称: $f_2(x, y) = f_2(-x, -y)$, 于是由对称性有

$$\iint_{D_1} \frac{xy}{1+x^2} e^{-(x^2+y^4)} dx dy = \iint_{D_2} \frac{xy}{1+x^2} e^{-(x^2+y^4)} dx dy$$

这意味着

$$I_2 = \iint_D \frac{xy}{1+x^2} e^{-(x^2+y^4)} dx dy = \iint_{D_1+D_3} \frac{xy}{1+x^2} e^{-(x^2+y^4)} dx dy = \iint_{D_2+D_3} \frac{xy}{1+x^2} e^{-(x^2+y^4)} dx dy$$

而 D_3 和 D_2 组合成了一个关于 y 轴对称的矩形区域, 且被积函数同样关于 y 轴对称

$$f_2(x, y) = -f_2(-x, y)$$

于是由对称性, $I_2 = 0$

综上所述

$$I = I_1 + I_2 = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2}$$

二重积分的基本步骤

- ① 根据题干给的积分区域描述，在坐标系中画出积分区域
- ② 观察被积函数和积分区域的对称性，尽可能让可以用对称性解决的部分解决，简化后续计算
- ③ 根据积分区域的形状和被积函数的结构选择积分方式和次序
 - 如果积分区域均为直边且被积函数形式简单，考虑使用直角积分
 - 如果积分区域都是斜边，直角积分较麻烦的，考虑简单的换元
 - 如果积分区域有曲边，或者被积函数中有平方开方项的，考虑换元为极坐标
- ④ 确认好积分上下限，进行累次积分

同学们可以总结遇到的积分区域以及适合的积分方式

第 2 讲 三重积分

一 三重积分的定义

三重积分是在空间区域内对三元函数进行的积分，其形式如下（ dV 称为体积微元）：

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

我们不再讨论其性质，直接进入计算的讨论

二 三重积分直角坐标系基本计算方法

※ 投影法

保持 x 和 y 不变，先对 z 作定积分，得到关于 x 和 y 的二重积分的上下限由空间区域的边界面决定，通常是 x 和 y 的函数

本步骤相当于将空间区域 V 投影到平面区域 D_{xy} （或者是直接压扁）

然后求得到的二重积分

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

当然可以选择先积 x 或 y ，要视具体问题而定

※ 平面截面法

· 保持 z 不变，先对 x 和 y 作二重积分，得到关于 z 的定积分

积分区域依然由空间区域的边界面决定，通常是 z 的函数

这一步骤相当于将空间区域 V 分割成一个个平面，并将其上的积分值转移到一元 z 数轴上

· 然后求得到的定积分

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{D_{xy}(z)} f(x, y, z) dx dy$$

· 当然可以选择其它的变量组合，要视具体问题而定

二 三重积分换元法 ★★★★★

※ 一般换元公式

三重积分的换元与二重积分相同，首先作如下变换：

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

然后求雅可比行列式

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

于是积分变成

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} g(u, v, w) \cdot J \cdot du dv dw$$

※ 柱坐标系

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad dx dy dz \rightarrow r dr d\theta dz$$

如果积分区域为柱体或锥体，可以使用该坐标系

例 1

计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ ，其中 Ω 是由曲线 $y^2 = 2z$ ， $x = 0$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与两平面 $z = 2$ ， $z = 8$ 所围成的立体

解

首先求解旋转曲面方程，由于旋转轴是 z 轴，因此不妨直接用柱坐标系表示曲面上一点 (r, θ, z) 与曲线上一点 (r_0, θ_0, z_0) 满足

$$\begin{cases} r_0^2 \sin^2 \theta_0 = 2z_0 \\ \theta_0 = \pi/2 \end{cases} \quad \begin{cases} r = r_0 \\ z = z_0 \end{cases} \rightarrow r = \sqrt{2z}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

因此

$$\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \int_2^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} r dr = 336\pi$$

※ 球坐标系

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \begin{cases} r > 0 \\ 0 \leq \varphi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \quad dx dy dz \rightarrow r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

· 如果积分区域为球形、椭球形、锥形等，可以使用该坐标系

例 3

24-25 期末

某物体在空间直角坐标系下表示为以下有界闭区域 $V = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\tan \alpha} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\}$,

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. 已知 V 内任一点的密度值等于该点到原点的距离,

(1) 求此物体的质量 M . (2) α 取何值时, 此物体的重心位于 $(0, 0, 1)$?

解

(1) 首先对 V 进行球坐标变换, 得到

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \varphi \leq \alpha \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

因此

$$M = \iiint_V \rho dV = \iiint_V r \cdot r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha \sin \varphi d\varphi \int_0^2 r^3 dr = 8\pi \cdot (1 - \cos \alpha) \cdot \frac{1}{4} 2^4 = 8\pi(1 - \cos \alpha)$$

(2) 设重心 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

根据 ρ 和 V 的对称性, $\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_V z \rho dV = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha d\varphi \int_0^2 r \cos \varphi \cdot r \cdot r^2 \sin \varphi dr = \frac{\frac{32\pi}{5} \sin^2 \alpha}{8\pi(1 - \cos \alpha)} = \frac{4}{5}(1 + \cos \alpha)$$

令 $\bar{z} = \frac{4}{5}(1 + \cos \alpha) = 1$, 解得

$$\alpha = \arccos \frac{1}{4}$$

三 三重积分计算技巧 ★★★★★

※ 普通对称性

① 关于坐标面对称

积分区域 Ω 的对称面	被积函数偶对称	被积函数奇对称
xOz	$f(x, y, z) = f(x, -y, z)$	$f(x, y, z) = -f(x, -y, z)$
yOz	$f(x, y, z) = f(-x, y, z)$	$f(x, y, z) = -f(-x, y, z)$
xOy	$f(x, y, z) = f(x, y, -z)$	$f(x, y, z) = -f(x, y, -z)$

② 关于原点对称

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \begin{cases} 8 \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV & f(x, y, z) = f(-x, -y, -z) \\ 0, & f(x, y, z) = -f(-x, -y, -z) \end{cases}$$

※ 轮换对称性

若将 x 和 y 对调后, 积分区域 Ω 不变, 则有 (其它对调同理)

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(y, x, z) dV$$

若将 x 、 y 、 z 轮换后, 积分区域 Ω 不变, 则有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV = \iiint_{\Omega} f(y, z, x) dV = \iiint_{\Omega} f(z, x, y) dV$$

与二重积分类似, 原积分等于这些相同积分的系数和 1 的线性组合, 可以通过此组合出合适的被积函数

例 2

设有界闭区域 Ω 由半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 与锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 围成, 且

$$I = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dV = \frac{\pi}{8}$$

则 $a =$ _____.

解

积分区域 Ω 如图, 其关于 yOz 和 xOz 对称, 因此

$$\iiint_{\Omega} x dV = \iiint_{\Omega} y dV = 0$$

因此原积分 $I = \iiint_{\Omega} z dV = \frac{\pi}{8}$, 此时再计算会更方便

选择球坐标系:
$$\begin{cases} 0 < r < a \\ 0 < \varphi < \pi/4, \text{ 于是} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^a r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\pi}{8}$$

解得 $a = 1$

例 3

24-25 期末

设均匀椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$, 密度为 1, l 是过原点直线, 且椭球上任意一点到该直线距离为 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2}$ (其中 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$), 求椭球绕 l 旋转的转动惯量

解

由转动惯量的定义

$$J = \iiint_{\Omega} r^2 dm = \iiint_{\Omega} \rho r^2 dV$$

代入, 得到要计算的积分为

$$J = \iiint_{\Omega} [x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2] dx dy dz$$

本题可通过对称性大幅简化计算, 首先进行拆分

$$J = \iiint_{\Omega} [(1 - \alpha^2)x^2 + (1 - \beta^2)y^2 + (1 - \gamma^2)z^2 - 2\alpha\beta xy - 2\alpha\gamma xz - 2\beta\gamma yz] dx dy dz$$

由于积分区域关于三个坐标面都成对称性, 因此

$$\iiint_{\Omega} 2\alpha\beta xy dx dy dz = \iiint_{\Omega} 2\alpha\gamma xz dx dy dz = \iiint_{\Omega} 2\beta\gamma yz dx dy dz = 0$$

于是积分简化为

$$J = \iiint_{\Omega} [(1 - \alpha^2)x^2 + (1 - \beta^2)y^2 + (1 - \gamma^2)z^2] dx dy dz$$

由于积分区域是椭球面, 为了利用轮换对称性, 进行变换

$$x = au, \quad y = bv, \quad z = cw \quad (0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi)$$

则雅可比行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

于是

$$J = \iiint_{\Omega} [(1-\alpha^2)a^2u^2 + (1-\beta^2)b^2v^2 + (1-\gamma^2)c^2w^2] dudvdw$$

积分区域变成半径为 1 的球 $0 \leq u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ ，具有轮换对称性，因此

$$\iiint_{\Omega} u^2 dudvdw = \iiint_{\Omega} v^2 dudvdw = \iiint_{\Omega} w^2 dudvdw = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (u^2 + v^2 + w^2) dudvdw$$

因此

$$J = (1-\alpha^2)a^2 \iiint_{\Omega} u^2 dudvdw + (1-\beta^2)b^2 \iiint_{\Omega} v^2 dudvdw + (1-\gamma^2)c^2 \iiint_{\Omega} w^2 dudvdw$$

$$J = [(1-\alpha^2)a^2 + (1-\beta^2)b^2 + (1-\gamma^2)c^2] \times \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} (u^2 + v^2 + w^2) dudvdw$$

现在求后面的积分，再做球坐标变换：

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{1}{3} \times 2\pi \times 2 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{15} \pi$$

因此

$$J = [(1-\alpha^2)a^2 + (1-\beta^2)b^2 + (1-\gamma^2)c^2] \frac{4}{15} \pi$$

第 1 讲 场论初步

一 场论初步

※ 场的概念

定义 若对空间内某一区域 Ω 中的某一点, 都有一个数量与其对应, 则称在 Ω 上给定了一个数量场

若对空间内某一区域 Ω 中的某一点, 都有一个向量与其对应, 则称在 Ω 上给定了一个向量场

数量场用数量函数 $u(\mathbf{r})$ (\mathbf{r} 为场中点的坐标) 来描述, 向量场用向量函数 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r}), R(\mathbf{r}))$ 来描述

※ 梯度场

对于数量场 $u(\mathbf{r})$, 其在每一个点的梯度 $\text{grad } u$ 构成了一个向量场, 叫做梯度场

$$\text{grad } u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

其中 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ 称为直角坐标系下的哈密顿算子, 是一个向量

※ 散度场

对于向量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r}), R(\mathbf{r}))$, 如下定义的数量函数称为向量场 \mathbf{A} 在点 \mathbf{r} 处的散度

$$\text{div } \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

※ 旋度场

对于向量场 $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r}), R(\mathbf{r}))$, 如下定义的向量函数称为向量场 \mathbf{A} 在点 \mathbf{r} 处的旋度

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

直角坐标系下, 旋度的具体形式为

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

旋度为 0 则称为无旋场, 且有与路径无关的数量势函数 u 存在

※ 调和场

若一个向量场 \mathbf{A} 既是无源场 ($\text{div } \mathbf{A} = 0$), 又是无旋场 ($\text{rot } \mathbf{A} = 0$), 则称 \mathbf{A} 为调和场, 此时有

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

u 为向量场的势函数，拉普拉斯算符 $\Delta = \nabla \cdot \nabla$

对大部分同学而言，只需要记住梯度、散度、旋度的表示式即可，讲义后面会大量使用这些符号

第 2 讲 第一类曲线与曲面积分

第一类积分针对数量场，为对一个曲线 L /曲面 S 上所有点的对应数量函数值作加和

一 第一类曲线积分 ★★★★★

※ 第一类曲线积分的定义

第一类曲线积分是在曲线 L 上对数量函数 $f(x, y, z)$ 积分，其形式为

$$\int_L f(x, y, z) ds$$

若 L 是闭合曲线，则积分符号加一个圆圈

$$\oint f(x, y, z) ds$$

$\int_L ds$ 的结果表示曲线 L 的弧长

※ 第一类曲线积分的基本计算

第一类曲线积分的基本计算方法

根据曲线 L 的方程类型：

① 将弧长微分 ds 按下表进行替换

曲线方程	弧长微分
参数方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$	$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$
极坐标方程 $r = r(\theta)$	$ds = \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} d\theta$
显式方程 $y = y(x)$	$ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$

② 代入替换被积函数 $f(x, y, z)$ ，最终替换为只含单个变量（一般是 t 或 θ ）的一元函数

③ 根据曲线 L 的起终点，确定变量 θ 的范围，从而确定积分的上下限（下限应低于上限）

④ 计算出得到的定积分

必要时，需要对方程类型进行转换

例 1

22-23 期末

计算第一类曲线积分 $\int_L \frac{x^2 y^2 (x+y)}{(x^2+y^2)^2} ds$ ，其中 L 是双扭线 $(x^2+y^2)^2 = 2a^2 xy$ 在第一象限的部分。

解

① 双扭线的类型是 $f(x, y) = 0$ ，不好计算，考虑到方程中含有平方和，考虑用极坐标转换：

$$r = a\sqrt{\sin 2\theta}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \text{不妨设 } a > 0$$

② 弧长微分

$$ds = \sqrt{(a\sqrt{\sin 2\theta})^2 + \left(a \frac{2\cos 2\theta}{2\sqrt{\sin 2\theta}}\right)^2} d\theta = a\sqrt{\sin 2\theta + \frac{\cos^2 2\theta}{\sin 2\theta}} d\theta = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta$$

③ 代入换元

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3 \sin 2\theta \sqrt{\sin 2\theta} \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta)}{2a^2} \frac{a}{\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2 \theta \cos^2 \theta (\sin \theta + \cos \theta)] d\theta = \frac{4}{15} a^2$$

例 2

24-25 期末

已知曲线 $L: x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t, 0 \leq t \leq 1$ ，则 $\int_L \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

解

将曲线 L 代入积分，转化为 t 的定积分：

$$\int_L \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} ds = \int_0^1 \frac{2\sqrt{(e^t \sin t)^2 + (e^t \cos t)^2 + (e^t)^2}}{(e^t \sin t)^2 + (e^t \cos t)^2 + (e^t)^2} dt$$

经过一通转换，最后变成

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{e^t} dt = \sqrt{3}(1 - e^{-1})$$

二 第一类曲面积分 ★★★★★

※ 第一类曲面积分的定义

第一类曲面积分是在曲面 S 上对数量函数 $f(x, y, z)$ 积分，其形式为

$$\iint_S f(x, y, z) dS$$

若 S 是闭合曲面，则积分符号加一个圆圈

$$\oiint_S f(x, y, z) dS$$

$\iint_S dS$ 的结果表示曲面 S 的面积

※ 第一类曲面积分的基本计算方法

与第一类曲线积分类似，根据曲面方程的形式：

① 按下表将 dS 代换为 $dx dy$

曲面方程	弧面积微分
$F(x, y, z) = 0$	$dS = \frac{1}{ F'_z } \sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2} dx dy$
$z = z(x, y)$	$dS = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} dx dy$

② 将被积函数化简为只剩 x 和 y ，变成二重积分

③ 确定二重积分的积分区域： S 在 xOy 面上的投影

但是要注意，不要让投影发生重叠（两个及以上的点的投影是同一个点）

例 2

23-24 期末

已知曲面 $\Sigma: z = x^2 + y^2 (0 \leq z \leq 6)$ ，则第一类曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{1+4z} dS = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解

将 Σ 往 xOy 投影，得

$$D: x^2 + y^2 \leq 6$$

则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \frac{1}{1+4z} dS &= \iint_D \frac{1}{1+4(x^2+y^2)} \sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2} dx dy \\ &= \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}} dx dy \\ &= \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+4r^2}} r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{6}} \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times 2d(1+4r^2) = 2\pi \times \frac{1}{4} \times 4 = 2\pi \end{aligned}$$

三 计算技巧 ★★★★★

※ 整体代入曲线或曲面方程

· 当曲线曲面方程用一般式表达时，如果被积函数含有与它们相同的结构，可以将整个方程代入被积函

数，从而简化被积函数。

- 代入后被积函数很可能变成一个常数，对于第一类积分，代表曲线弧长或曲面表面积。因为题目给的曲线曲面通常是规则的，所以可以从几何角度计算长度面积，进而避免复杂的积分。
- 对于第二类积分，经常通过奇点换区域法选择可代入的方程，消除奇点

例 1

已知 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x + y + z = \frac{3}{2}a \end{cases}$ ，则 $\oint_L (yz + zx + xy) ds = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解

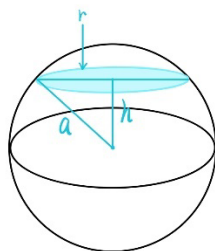
曲线方程为一般式，考虑代入方程法，在曲线上被积函数

$$yz + zx + xy = \frac{1}{2}(2yz + 2zx + 2xy) = \frac{1}{2}((x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)) = \frac{5}{8}a^2$$

因此

$$I = \oint_L (yz + zx + xy) ds = \frac{5}{8}a^2 \oint_L ds$$

画图可得曲线 L 为一平面所截球面得到的圆，要求的是这个圆的周长



$$h = \frac{|0 + 0 + 0 - \frac{3}{2}a|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad (\text{点到平面公式})$$

计算得

$$I = \frac{5}{8}\pi a^3$$

※ 普通对称性

和重积分一样，曲线曲面积分中很多东西是不可能积出来的，需要同学擦亮眼睛，意识到需要通过对称性直接简化甚至删除，避免浪费时间

若积分曲线 / 曲面关于…对称	且被积函数满足	则
yOz 面	$f(x, y, z) = f(-x, y, z)$	区域减半，积分 $\times 2$
xOy 面	$f(x, y, z) = f(x, y, -z)$	
xOz 面	$f(x, y, z) = f(x, -y, z)$	
x 轴	$f(x, y, z) = f(x, -y, -z)$	
y 轴	$f(x, y, z) = f(-x, y, -z)$	

z 轴	$f(x, y, z) = f(-x, -y, z)$	积分为 0
原点	$f(x, y, z) = f(-x, -y, z)$	
yOz 面	$f(x, y, z) = -f(-x, y, z)$	
xOy 面	$f(x, y, z) = -f(x, y, -z)$	
xOz 面	$f(x, y, z) = -f(x, -y, z)$	
x 轴	$f(x, y, z) = f(x, -y, -z)$	
y 轴	$f(x, y, z) = -f(-x, y, -z)$	
z 轴	$f(x, y, z) = f(-x, -y, z)$	
原点	$f(x, y, z) = -f(-x, -y, z)$	

需要注意，只要被积函数中能够拆出满足对称性的积分，这部分积分就可以进行相应的处理

例 1

计算 $I = \iint_{\Sigma} (x + y + z)^2 dS$ ，其中 $\Sigma: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

解

由于 Σ 关于 yOz 面对称，因此

$$\iint_{\Sigma} xy dS = \iint_{\Sigma} zx dS = 0$$

同理，由于 Σ 关于 xOz 面对称，因此

$$\iint_{\Sigma} yz dS = 0$$

代入：

$$I = \iint_{\Sigma} [(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx)] dS = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = R^2 \iint_{\Sigma} dS = 2\pi R^4$$

※ 轮换对称性

对于二维积分，若将 x 和 y 互换，积分区域 L 不变，则满足轮换对称性，此时有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_L f(y, x) ds$$

对于空间积分，若将 x, y, z 任意调换，积分区域 L 或 S 不变，则也满足轮换对称性，此时有

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_S f(y, z, x) dS = \iint_S f(z, x, y) dS$$

通过轮换对称性，我们可以利用上面这些相等的积分组合出新的积分 I ，使被积函数可以被曲线曲面方程代入，从而简化计算 **曲面积分中的球面往往会用到轮换对称性**

例 3

计算 $\int_L x^2 ds$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线

解

由于任意交换 x, y, z 均不改变积分区域, 因此由轮换对称性

$$I = \int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \int_L z^2 ds$$

于是

$$I = \frac{1}{3}(\int_L x^2 ds + \int_L y^2 ds + \int_L z^2 ds) = \frac{1}{3} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{a^2}{3} \int_L ds = \frac{2}{3} \pi a^3$$

例 4

已知曲线 $L: x^2 + y^2 = 4$, 则第一类曲线积分 $\oint_L (2x + y)^2 ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

解

由于 L 关于 x 轴对称, 因此

$$\oint_L xy ds = 0$$

则

$$I = \oint_L (2x + y)^2 ds = \oint_L (4x^2 + 4xy + y^2) ds = \oint_L (4x^2 + y^2) ds$$

同时, L 具有轮换对称性

$$\oint_L x^2 ds = \oint_L y^2 ds = \frac{1}{2} \oint_L (x^2 + y^2) ds = 2 \oint_L ds = 2 \times 2\pi \times 2 = 8\pi$$

因此

$$I = \oint_L (4x^2 + y^2) ds = (4 + 1) \times 8\pi = 40\pi$$

例 5

计算 $I = \iint_{\Sigma} (\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{4}) dS$, 其中 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

解

由轮换对称性:

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} a^2 dS$$

因此

$$I = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} x^2 dS + \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} y^2 dS + \frac{1}{4} \iint_{\Sigma} z^2 dS = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \frac{1}{3} \iint_{\Sigma} a^2 dS = \frac{13}{36} \times a^2 \times 4\pi a^2 = \frac{13}{9} \pi a^4$$

第 3 讲 第二类曲线曲面积分

第二类积分针对向量场，为对一个曲线或曲面上所有点的对应向量场内积作加和

内积：该点对应的向量场函数 \mathbf{A} 与曲线单位切向量 $\boldsymbol{\tau}$ /曲面单位法向量 \mathbf{n} 的内积

第二类积分具有方向性，其积分值与切/法向量方向选取有关，两个方向的积分值相差一个负号

一 第二类平面曲线积分 ★★★★★

※ 第二类曲线积分定义（平面曲线）

第二类曲线积分是在一条曲线 L 的所有点处，对每个点的向量函数以及曲线在该点处的切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 的点积进行第一类积分。对于平面曲线 L ，就是

$$I = \int_L \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_L Pdx + Qdy$$

其中， $d\mathbf{s} = \boldsymbol{\tau} ds = (dx, dy)$ 代表曲线 L 在点 (x, y) 的切向量微元（有向弧长微元）

若曲线 L 是闭合曲线，则表示为

$$I = \oint_L \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} ds$$

第二类曲线积分要注意的是，积分曲线要规定方向，因为切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 实际上可以取两个相反的方向从而得到两个相反的积分结果

※ 第二类曲线积分的基本计算方法

平面第二类曲线积分计算思路 1

由积分曲线直接换元为单变量定积分，适合参数方程表示的曲线，由路径方向决定积分上下限

例 1

已知 L 为从点 $A(-2, 0)$ 沿 $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ 到点 $B(2, 0)$ ，计算第二类曲线积分

$$I_2 = \int_L (x^2 - y^2) dx + (x + y) dy .$$

解

令

$$\begin{cases} x = 2 \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

则 θ 由 π 取到 0

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\pi}^0 (4\cos^2\theta - \sin^2\theta)d(2\cos\theta) + (2\cos\theta + \sin\theta)d(\sin\theta) \\ &= \int_{\pi}^0 2(5\cos^2\theta - 1)d(\cos\theta) + \left(1 + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \sin 2\theta\right)d\theta \\ &= \left(\frac{10}{3}\cos^3\theta - 2\cos\theta\right)\Big|_{\pi}^0 + \left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{4}\cos 2\theta\right)\Big|_{\pi}^0 \\ &= \frac{8}{3} - \pi \end{aligned}$$

※ 格林定理

规定闭合区域边界方向：若沿边界行走时区域总是位于左侧，则该方向为正向 L^+ ，否则为负向 L^-

定理 若二元函数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在有界闭区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上连续，且有一阶连续偏导数，则

$$\oint_{L^+} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy$$

一定要注意定理要求 P 和 Q 在 D 内均有定义

平面第二类曲线积分计算思路 2

- 若曲线是闭合曲线，且包含的区域内函数均有定义，则使用格林公式转为二重积分
- 若曲线不是闭合曲线，但是可以加上新路径（该路径的曲线积分可求，为 I_2 ）形成闭合曲线就可以用格林定理求出闭合曲线积分，再减去 I_2

例 2

设有向曲线 L 与曲线 $xy = 1$ ($x > 0, y > 0$) 的交点为 $A(4, \frac{1}{4})$ 和 $B(1, 1)$ ，两曲线所围区域 D 的面积为

S ，计算曲线积分 $I = \int_{L(A)}^{L(B)} e^{xy}y^2 dx + [e^{xy}(1+xy) + x]dy$

解

设 L' : $xy = 1$ ，起终点分别为 A 和 B ，则

$$\begin{aligned} \int_{L(A)}^{L(B)} Pdx + Qdy + \int_{L'(B)}^{L'(A)} Pdx + Qdy &= \oint_{L+L'} Pdx + Qdy \\ \int_{L'(B)}^{L'(A)} e^{xy}y^2 dx + [e^{xy}(1+xy) + x]dy &= \int_1^4 \frac{e}{x^2} dx + \int_1^{1/4} \left(2e + \frac{1}{y}\right) dy = -\frac{3e}{4} - 2\ln 2 \end{aligned}$$

路径 $A \xrightarrow{L} B \xrightarrow{L'} A$ 可能是 D 的正向边界线，也可能是负向，因此

$$\oint_{L+L'} Pdx + Qdy = \pm \iint_D [(ye^{xy}(1+xy) + ye^{xy} + 1) - (xe^{xy}y^2 + 2ye^{xy})] dx dy = \pm \iint_D dx dy = \pm S$$

路径 $A \xrightarrow{L} B \xrightarrow{L'} A$ 是 D 的正向边界线时

$$I = S - \frac{3e}{4} - 2\ln 2$$

路径 $A \xrightarrow{L} B \xrightarrow{L'} A$ 是 D 的负向边界线时

$$I = -S - \frac{3e}{4} - 2\ln 2$$

※ 路径无关

定理 若二元函数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在单连通闭区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上连续, 且有一阶连续偏导数, 则下列 4 个命题等价

- D 中任意分段光滑闭合曲线 L , $\oint_L Pdx + Qdy = 0$
- D 中任意分段光滑曲线 L , $\int_L Pdx + Qdy$ 只和路径的起终点有关
- $Pdx + Qdy$ 是 D 内某函数 u 的全微分
- D 内恒有 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ (就是二维平面内的旋度处处为 0)

注: 单连通区域简单来讲就是没有“洞”的区域

平面第二类曲线积分计算思路 3

- 检验向量场是否是无旋场, 也就是检验是否有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

- 如果向量场为无旋场, 则根据路径无关, 在原起终点之间选择更简单的路径, 简化计算
- 即使向量场不是无旋的, 也有机会利用曲线无关简化计算 (见例题)

例 3

22-23 期末

求 $I = \int_L (e^{-x^2} \sin x + 3y^2 - \cos y)dx + (x \sin y - y^4)dy$, $L: (-\pi, 0) \xrightarrow{y=\sin x} (\pi, 0)$

解

检验旋度:

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 6y + \sin y - \sin y = 6y$$

注意到 $6y$ 实际上是由 P 中的“ $3y^2$ ”这一项产生的, 如果这一项不存在, 旋度就是 0 了

于是把这一项的积分拆出去

$$I = I_1 + I_2 = \int_L (e^{-x^2} \sin x - \cos y)dx + (x \sin y - y^4)dy + \int_L 3y^2 dx$$

此时 I_1 与具体路径无关, 将路径 L 换成 $L': L: (-\pi, 0) \xrightarrow{y=0} (\pi, 0)$

$$I_1 = \int_{L'} (e^{-x^2} \sin x - \cos y) dx + (x \sin y - y^4) dy = \int_{-\pi}^{\pi} (e^{-x^2} \sin x - 1) dx = 2\pi$$

而

$$I_2 = \int_L 3y^2 dx = 3 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx = 12 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = 3\pi$$

因此

$$I = 2\pi + 3\pi = 5\pi$$

※ 奇点相关定理

若闭合路径包含的区域中存在函数无定义的点（称为奇点），则闭合曲线积分并不为 0，但有

定理 若二元函数 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在复连通闭区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上连续，一阶偏导数连续， $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ，则

环绕同一组“洞”的任何两条同向闭曲线上的曲线积分相等

平面第二类曲线积分计算思路 4

· 若是闭合曲线，先检验是否有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

· 如果成立，且曲线内部有奇点，则选择一条特殊的绕同样奇点的曲线，将该曲线方程代入函数中，消除产生奇点的原因（通常是分母为 0 产生的）

例 4

22-23 期末

$$\text{求 } I = \oint_L \frac{(xe^{x^2+4y^2} + y)dx + (4ye^{x^2+4y^2} - x)dy}{x^2 + 4y^2}, \quad L: x^2 + y^2 = 4, \text{ 逆时针方向}$$

解

检查

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{8xye^{x^2+4y^2}(x^2 + 4y^2 - 1) + x^2 - 4y^2}{(x^2 + 4y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

成立，但 L 包含了奇点 $(0, 0)$ ，考虑换路径

奇点的产生是因为分母 $x^2 + 4y^2$ ，不妨取路径 $L': x^2 + 4y^2 = 1$ ，包含奇点 $(0, 0)$

将新的曲线方程代入被积函数：

$$I = \oint_L (xe + y)dx + (4ye - x)dy$$

区域为椭圆，其面积为 $\frac{\pi}{2}$

此时没有了奇点，使用格林公式化为二重积分

$$I = \oint_L (xe + y)dx + (4ye - x)dy = \iint_{x^2+4y^2 \leq 1} (-1 - 1) dx dy = -2 \iint_{x^2+4y^2 \leq 1} dx dy = -\pi$$

例 2

24-25 期末

设 C 是围绕原点的光滑简单闭曲线，方向为逆时针方向，求 $\oint_C \frac{2xydx - x^2dy}{x^4 + y^2}$ 。

解

由于

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x(x^4 + y^2) - 2xy \cdot 2y}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{2x^5 - 2xy^2}{(x^4 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2x(x^4 + y^2) - x^2 \cdot 4x^3}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{2x^5 - 2xy^2}{(x^4 + y^2)^2}$$

因此

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

取 $L: x^4 + y^2 = 1$ ，沿逆时针方向，于是

$$\oint_C \frac{2xydx - x^2dy}{x^4 + y^2} = \oint_L \frac{2xydx - x^2dy}{x^4 + y^2} = \oint_L 2xydx - x^2dy$$

再使用格林定理

$$\oint_L 2xydx - x^2dy = -\iint_D 4xdxdy$$

由于 D 关于 y 轴对称，且被积函数为奇函数，因此积分为 0

四 第二类曲面积分 ★★★★★

※ 第二类曲面积分的定义

第二类曲面积分是在曲面 S 上，对某点的向量函数 \mathbf{A} 与曲面在该点的单位法向量 \mathbf{n} 的内积进行积分

$$I = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy$$

其中，向量场函数 $\mathbf{A} = (P, Q, R)$ ，单位法向量 $\mathbf{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ ， $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS = (dydz, dzdx, dxdy)$ 称为有向曲面微分

※ 第二类曲面积分的基本计算方法：投影换元

直接将三个二重积分都转换为单个区域 D 上的二重积分， D 为曲面 Σ 在该面上的投影

曲面方程	有向面积微分
------	--------

$F(x, y, z) = 0$	$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_D \mathbf{A} \cdot (F'_x, F'_y, F'_z) \frac{1}{ F'_z } dx dy$
$z = f(x, y)$	$\iint_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_D \mathbf{A} \cdot (-f'_x, -f'_y, 1) dx dy$

规定曲面为上侧时取“+”，下侧时取“-”

注意：不要让投影发生重叠（两个及以上的点的投影是同一个点），通过分割曲面或改投影面来避免

例 1

求 $\iint_{\Sigma} x^3 dy dz$ ， Σ 为锥面 $z^2 = x^2 + y^2$ ($0 \leq z \leq 1$) 的下侧

解

锥面投影到 yOz 会产生两层投影，因此最好还是投影到 xOy 面，由公式

$$I = - \iint_{\Sigma} P(x, y, z) \frac{F'_x}{F'_z} dy dz = - \iint_D x^3 \frac{2x}{2z} dx dy = - \iint_D \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

用极坐标代换：

$$I = - \iint_D \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r^4 \cos^4 \theta}{r} r dr = - \frac{3\pi}{20}$$

※ 闭合曲面且内部无奇点：高斯定理

定理 设 V 是 \mathbb{R}^3 上的有界闭区域，其边界是片光滑的闭曲面， S 取外侧，如果 P, Q, R 是定义在 V 上具有连续偏导数的三元函数，则

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV \quad (\text{即对散度 } \operatorname{div} \mathbf{A} \text{ 积分})$$

$$\oiint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

如果不是闭合曲面，可以补充面（要求这上的积分好算），再用高斯定理，注意要减去补充面的积分

例 2

22-23 期末

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是以光滑曲面 Γ 为边界的有界区域，函数 $u(x, y, z)$ 与 $v(x, y, z)$ 及它们的一阶偏导数在闭区域 $\Omega \cup \Gamma$ 上连续，在 Ω 内有二阶连续偏导数，试利用高斯公式证明：

$$\iiint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dV = \iint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS$$

其中算子 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ， \mathbf{n} 是 Γ 上的外法向

证明

由方向导数的性质, $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u \cdot \mathbf{n}$, $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \nabla v \cdot \mathbf{n}$, 因此由两类曲面积分的关系

$$\iint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = \iint_{\Gamma} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Gamma} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot d\mathbf{S}$$

因此由高斯公式

$$\iint_{\Gamma} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla v - v \nabla u) dV$$

根据梯度算符的运算规则

$$\nabla \cdot (u \nabla v - v \nabla u) = \nabla u \cdot \nabla v + u \nabla \cdot \nabla v - \nabla u \cdot \nabla v - v \nabla \cdot \nabla u = u \Delta v - v \Delta u$$

因此

$$\iint_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = \iint_{\Gamma} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dV$$

(如果不熟悉抽象的梯度运算符, 也可以用具体的形式运算)

※ 不含奇点: 补面法

再选上一个面 Σ , 选定正方向, 和原来要求的 S 面组合成一个闭合曲面, 要求:

- $S + \Sigma$ 可用高斯定理计算出 I_1
- Σ 可以直接计算 (通常选择平面) 出 I_2

那么要求的积分

$$I = I_1 - I_2$$

例 3

24-25 期末

已知有向曲面 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($z \geq 0$), 方向取上侧, 计算第二类曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \cos x dydz - \sqrt{1-y^2} dzdx + z dx dy.$$

解

补充曲面: $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$, 并取下侧, 则与原曲面构成封闭区域

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \geq 0$$

对于 $I_0 = \iint_D 0 dx dy = 0$, 因此原积分就是封闭曲面的积分

$$I + I_0 = \iiint_{\Omega} \left(-\sin x + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} + 1 \right) dx dy dz$$

由于 Ω 关于 xOz , yOz 面对称, 前两项分别是 x 的奇函数和 y 的奇函数, 因此积分为 0, 因此

$$I + I_0 = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi \times 1^3 = \frac{2}{3} \pi$$

$$I = \frac{2}{3} \pi$$

例 4

23-24 期末

已知有向曲面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ ($z \leq 2$), 下侧, 计算第二类曲面积分

$$I_3 = \iint_S x^2 y dy dz - xy^2 dz dx + 3z dx dy.$$

解

如图

补充 $S_0: x^2 + y^2 \leq 4, z = 2$, 取上侧, 从而构成闭合曲面, 设所围区域 V 为一个半球

$$I_{30} = \iint_{S_0} x^2 y dy dz - xy^2 dz dx + 3z dx dy = \iint_{S_0} 6 dx dy = 24\pi$$

$$I_3 + I_{30} = \iint_{S+S_0} x^2 y dy dz - xy^2 dz dx + 3z dx dy = \iiint_V (2xy - 2xy + 3) dV = 3 \times \frac{4}{3} \pi \times 2^3 \times \frac{1}{2} = 16\pi$$

因此

$$I_3 = 16\pi - 24\pi = -8\pi$$

※ 含奇点: 换面法

对于无源场中包含奇点的闭合曲面 S' : 换成一个包含相同奇点的曲面 S , 方向不变

这个曲面 S 需要能消除奇点, 从而进一步使用高斯定理计算

例 5

求 $I = \iint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, 其中 Σ 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 法向量指向外侧

解

闭合曲面, 优先尝试高斯定理, 但曲面包含了奇点 $(0,0,0)$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0$$

因此换面，注意到奇点是分母含有 $x^2 + y^2 + z^2$ 导致的，因此 Σ' : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$I = \iint_{\Sigma'} xdydz + ydzdx + zdx dy = \iiint_V (1+1+1)dV = 3 \times \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = 4\pi$$

五 空间曲线的第二类曲线积分

$$I = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

※ **基本计算方法：换元法** 与平面曲线一致

例 1

计算 $I = \oint_L ydx + zdz + xdz$ ，其中 L 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ ($a > 0$) 与曲面 $x + z = a$ 的交线，且从 z 轴正向看去为逆时针方向。

解

将 $x + z = a$ 代入到 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ ，得 $2x^2 + y^2 = a^2$ ，因此设

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = a(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t)$$

代入

$$\begin{aligned} I &= \oint_L a \sin t d(\frac{a}{\sqrt{2}} \cos t) + a(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t) d(a \sin t) + \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t d[a(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t)] \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\cos t \sin t}{2}) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (-\frac{1}{\sqrt{2}}) dt = -\sqrt{2}\pi a^2 \end{aligned}$$

※ **闭合曲线 & 内部无奇点：斯托克斯定理**

定理 设 S 是片光滑的闭曲面，取定法向量方向，其边界 L 是按段光滑的连续曲线，如果 $\mathbf{A} = (P, Q, R)$ 是 S (含 L) 上的连续可导的向量场，则

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (L \text{ 的方向和 } S \text{ 的方向满足右手定则})$$

展开式如下：

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

通常用于计算边界为两曲面交线的第二类曲线积分

例 2

求 $I = \oint_L ydx + zdz + xdz$ ，其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线，并且从 x

轴的正向看是逆时针方向（ x 轴的正向看是指视角位于 x 轴正无穷远处）。

解

由右手定则， L 所围的曲面应取上侧，该曲面为平面 $x + y + z = 0$ 的一部分，因此法向量

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

由斯托克斯公式

$$I = \oint_L ydx + zdy + xdz = -\iint_{\Sigma} dydz + dydz + dx dy = -\sqrt{3} \iint_{\Sigma} dS = -\sqrt{3}\pi a^2$$

※ 无旋场：路径无关

定理 设 $V \subset \mathbb{R}^3$ 为空间单连通区域，若函数 P, Q, R 在 V 上连续且有一阶连续偏导数，则下面四个条件是等价的：

- 对 V 内任一分段光滑的封闭曲线 L ， $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$
- 对 V 内任一分段光滑的曲线 L ， $\int_L Pdx + Qdy + Rdz$ 与路径无关
- $Pdx + Qdy + Rdz$ 是 V 内某一函数 u 的全微分
- V 内处处有 $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ （旋度为 0）

如果空间内的闭合曲线包围的是平面，可以按斯托克斯公式化为第二类曲面积分

例 3

求 $I = \int_L (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$ ，其中 L 是沿着螺旋线 $x = a \cos \theta$ ， $y = a \sin \theta$ ， $z = \frac{h}{2\pi}\theta$ 从点 $A(a, 0, 0)$ 到 $B(a, 0, h)$ 的曲线。

解

可以验证

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -x = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = -y = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = -z = \frac{\partial P}{\partial y}$$

因此该积分与路径无关，改路径 $A(a, 0, 0) \xrightarrow{x=a, y=0} B(a, 0, h)$

$$I = \int_0^h z^2 dz = \frac{1}{3}h^3$$

三 第二类积分的对称性

第二类积分只有普通对称性，且不能只考虑区域对称性，还要考曲线和曲面的方向

注意：不要背下面这些表格

※ 平面曲线的普通对称性

若曲线关于…对称	则	若	则
x 轴	dy 方向相同	$Q(x, y) = -Q(x, -y)$	$\int Q dy = 0$
	dx 方向相反	$P(x, y) = P(x, -y)$	$\int P dx = 0$
y 轴	dy 方向相反	$Q(x, y) = Q(-x, y)$	$\int Q dy = 0$
	dx 方向相同	$P(x, y) = -P(-x, y)$	$\int P dx = 0$
原点	dx 和 dy 方向都相同	$P(x, y) = -P(-x, y)$	$\int P dx = 0$
		$Q(x, y) = -Q(x, -y)$	$\int Q dy = 0$

例 1

计算 $I = \int_L (2x + y - \cos y) dx + x \sin y dy$ ，其中 L 是从 $A(-\pi, 0)$ 沿曲线 $y = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ 到 $B(\pi, 0)$ 的弧段。

解

L 关于原点对称，且 $(2x + y) = -(2(-x) - y)$ ，因此由对称性

$$\int_L (2x + y) dx = 0$$

于是

$$I = \int_L (-\cos y) dx + x \sin y dy$$

检验可得 $\frac{\partial P}{\partial y} = \sin y = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ，因此路径无关，换 $L' : A(-\pi, 0) \xrightarrow{y=0} A(\pi, 0)$ ：

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

※ 空间曲线的普通对称性

若曲线关于…对称	则	若	则
x 轴	dx 方向相反	$P(x, y, z) = P(x, -y, -z)$	$\int P dx = 0$
	dy 方向相同	$Q(x, y, z) = -Q(x, -y, -z)$	$\int Q dy = 0$
	dz 方向相同	$R(x, y, z) = -R(x, -y, -z)$	$\int R dz = 0$
y 轴	dx 方向相同	$P(x, y, z) = -P(-x, y, -z)$	$\int P dx = 0$

	dy 方向相反	$Q(x, y, z) = Q(-x, y, -z)$	$\int Q dy = 0$
	dz 方向相同	$R(x, y, z) = -R(-x, y, -z)$	$\int R dz = 0$
z 轴	dx 方向相同	$P(x, y, z) = -P(-x, -y, z)$	$\int P dx = 0$
	dy 方向相同	$Q(x, y, z) = -Q(-x, -y, z)$	$\int Q dy = 0$
	dz 方向相反	$R(x, y, z) = R(-x, -y, z)$	$\int R dz = 0$
yOz 面	dx 方向相同	$P(x, y, z) = -P(x, -y, -z)$	$\int P dx = 0$
	dy 方向相反	$Q(x, y, z) = Q(x, -y, -z)$	$\int Q dy = 0$
	dz 方向相反	$R(x, y, z) = R(x, -y, -z)$	$\int R dz = 0$
xOz 面	dx 方向相反	$P(x, y, z) = P(-x, y, -z)$	$\int P dx = 0$
	dy 方向相同	$Q(x, y, z) = -Q(-x, y, -z)$	$\int Q dy = 0$
	dz 方向相反	$R(x, y, z) = R(-x, y, -z)$	$\int R dz = 0$
xOy 面	dx 方向相反	$P(x, y, z) = P(-x, -y, z)$	$\int P dx = 0$
	dy 方向相反	$Q(x, y, z) = Q(-x, -y, z)$	$\int Q dy = 0$
	dz 方向相同	$R(x, y, z) = -R(-x, -y, z)$	$\int R dz = 0$
原点	dx dy dz 方向都相同	$P(x, y, z) = -P(x, -y, -z)$	$\int P dx = 0$
		$Q(x, y, z) = -Q(-x, y, -z)$	$\int Q dy = 0$
		$R(x, y, z) = -R(-x, -y, z)$	$\int R dz = 0$

※ 空间曲面的普通对称性

若曲线关于...对称	则	若	则
xOy 面	dx dy 方向相同	$P(x, y, z) = -P(x, y, -z)$	$\int R dx dy = 0$
	dy dz 方向相反	$Q(x, y, z) = Q(x, y, -z)$	$\int P dy dz = 0$
	dz dx 方向相反	$R(x, y, z) = R(x, y, -z)$	$\int Q dz dx = 0$
yOz 面	dx dy 方向相反	$P(x, y, z) = P(-x, y, z)$	$\int R dx dy = 0$
	dy dz 方向相同	$Q(x, y, z) = -Q(-x, y, z)$	$\int P dy dz = 0$
	dz dx 方向相反	$R(x, y, z) = R(-x, y, z)$	$\int Q dz dx = 0$
xOz 面	dx dy 方向相反	$P(x, y, z) = P(x, -y, z)$	$\int R dx dy = 0$
	dy dz 方向相反	$Q(x, y, z) = Q(x, -y, z)$	$\int P dy dz = 0$
	dz dx 方向相同	$R(x, y, z) = -R(x, -y, z)$	$\int Q dz dx = 0$

利用对称性可以先化简部分积分，从而能符合特殊情况，简化计算

例 1

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{2-x^2-y^2} \\ z = x \end{cases}$, 起点为 $A(0, \sqrt{2}, 0)$, 终点为 $B(0, -\sqrt{2}, 0)$, 计算曲线积分

$$I = \int_L (y+z)dx + (z^2 - x^2 + y)dy + x^2y^2dz$$

解

L 关于 xOz 面对称, 因此 dy 方向相同, dx 和 dz 方向相反, 由对称性

$$\int_L zdx = \int_L ydy = \int_L x^2y^2dz = 0$$

于是

$$I = \int_L ydx + (z^2 - x^2)dy$$

代入曲线方程中的 $x = z$:

$$I = \int_L ydx$$

将曲线化成参数方程: $x = z = \cos t$, $y = \sqrt{2} \sin t$:

$$I = -\int_{\pi/2}^{-\pi/2} \sqrt{2} \sin^2 t dt = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

例 2

计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{xdydz + z^2dxdy}{x^2 + y^2 + z^2}$, 其中 Σ 是曲面 $x^2 + y^2 = R^2$ 以及两平面 $z = \pm R (>0)$ 围成的立体表面外侧

解

Σ 共有三个面, 设 $\Sigma_1: x^2 + y^2 = R^2$, $\Sigma_2: z = R$, $\Sigma_3: z = -R$

这三个面均关于 yOz 面对称, 且 $\frac{xdydz}{x^2 + y^2 + z^2}$ 关于 x 为奇函数

这三个面均关于 xOy 面对称, 且 $\frac{z^2dxdy}{x^2 + y^2 + z^2}$ 关于 z 为奇函数